

THÈSES
PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par
Jean-Pierre MAREC

1^{re} THÈSE : Transferts optimaux entre orbites elliptiques proches.

2^e THÈSE : Résultats théoriques et expérimentaux concernant la
transmission de chaleur en régime oscillatoire.

Soutenues le 13 juin 1967 devant la Commission d'examen.

MM. MALAVARD L. Président.

THIRY Y.	}	Examineurs.
GERMAIN P.		

KONONENKO V.O.	}	Membres invités.
CONTENSOU P.		

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc

1967

THÈSES
PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES
par
Jean-Pierre MAREC

1^{re} THÈSE : Transferts optimaux entre orbites elliptiques proches.

2^e THÈSE : Résultats théoriques et expérimentaux concernant la transmission de chaleur en régime oscillatoire.

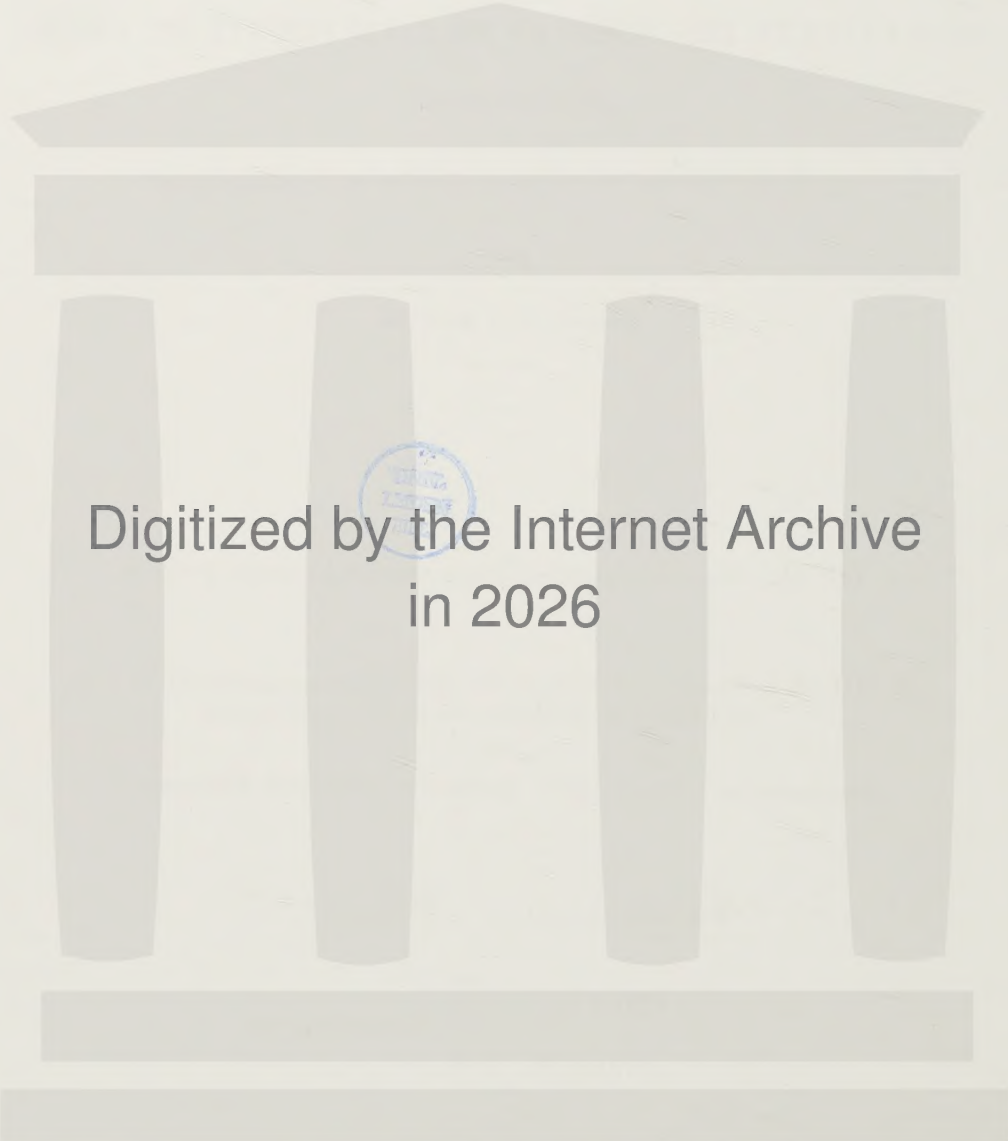
Soutenues le 13 juin 1967 devant la Commission d'examen.

MM. MALAVARD L. Président.

THIRY Y.	}	Examineurs.
GERMAIN P.		

KONONENKO V.O.	}	Membres invités.
CONTENSOU P.		

O. N. E. R. A.
29, Avenue de la Division Leclerc
1967



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549003_0010

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Y. THIRY qui m'a guidé dans ce travail et m'a fait bénéficier de son expérience par ses remarques judicieuses, ses conseils bienveillants et ses suggestions éclairées, au cours de nombreux entretiens.

Je remercie également Monsieur le Professeur L. MALAVARD d'avoir favorisé mon orientation vers la Recherche et accepté la Présidence du Jury.

Ma gratitude s'adresse aussi à Monsieur le Professeur P. GERMAIN et à l'OFFICE NATIONAL D'ÉTUDES ET DE RECHERCHES AÉROSPATIALES qui m'ont fourni les moyens d'effectuer ce travail, ainsi qu'à Monsieur l'Ingénieur Général du Génie Maritime P. CONTENSOU dont les œuvres ont largement inspiré cette étude et qui m'a permis de me consacrer pleinement à cette thèse dont il a suivi les étapes avec beaucoup de bienveillance.

Je ne voudrais pas oublier le concours de Messieurs M. BISMUT et C. MARCHAL qui m'ont aidé à éclaircir de nombreux points au cours de fructueuses discussions.

Merci enfin à tous ceux qui ont contribué à l'édition de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

	pages
RÉSUMÉ, SUMMARY, ZUSAMMENFASSUNG, Краткое изложение.	III à V
NOTATIONS.	1
INTRODUCTION.	5
 I. ÉTUDE GÉNÉRALE.	 7
I,1. THÉORIE DU "DOMAINE DE MANŒUVRABILITÉ" DE CONTENSOU ET "PRINCIPE DU MAXIMUM" DE PONTRYAGIN.	7
I,1.1. Définitions.	7
I,1.2. Énoncé du problème d'optimisation.	8
I,1.3. Démonstration simplifiée du "Principe du Maximum".	9
I,1.4. Interprétation du vecteur adjoint.	14
I,1.5. Intégrale première de l'Hamiltonien.	14
I,2. PROBLÈME DES TRANSFERTS OPTIMAUX.	15
I,2.1. Définitions.	16
I,2.2. Systèmes de propulsion.	17
I,2.3. Cas du champ de gravitation quelconque.	18
I,2.4. Cas du champ central.	26
I,3. TRANSFERTS ENTRE ORBITES PROCHES.	31
I,3.1. Linéarisation du problème.	31
I,3.2. Détermination de la poussée optimale en fonction de l'adjoint.	38
I,3.3. Détermination des variations des éléments orbitaux en fonction de l'adjoint (intégration).	50
I,3.4. Recherche de l'adjoint à partir des variations des éléments orbitaux (inversion).	51
I,3.5. Critère de comparaison des performances des systèmes de propulsion (S_1) et (S_2).	53
I,4. RÉSULTATS GÉNÉRAUX - DÉCOUPLAGES.	54
I,4.1. Cas des systèmes de propulsion (S_2) (vitesse d'éjection modulable).	54
I,4.2. Cas des systèmes de propulsion (S_1) (vitesse d'éjection constante).	57
 II. PROBLÈMES PARTICULIERS.	 61
II,1. VARIATION INFINITÉSIMALE OPTIMALE DU DEMI-GRAND AXE.	62
II,1.1. Introduction.	62
II,1.2. Poussée optimale.	62
II,1.3. "Dilatation" optimale de l'orbite. Consommation.	65
II,1.4. Conclusion.	71

II,2. ROTATION INFINITESIMALE OPTIMALE DU PLAN DE L'ORBITE.	71
II,2.1. Introduction.	71
II,2.2. Poussée optimale.	72
II,2.3. Rotation optimale. Consommation.	77
II,2.4. Conclusion.	89
II,3. TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES CIRCULAIRES COPLANAIRES PROCHES.	90
II,3.1. Introduction.	90
II,3.2. Poussée optimale.	91
II,3.3. "Dilatation" optimale du rayon de l'orbite circulaire. Consommation.	93
II,3.4. Conclusion.	116
II,4. TRANSFERTS OPTIMAUX PLANS DE TYPE HOHMANN ENTRE ORBITES QUASI-CIRCULAIRES PROCHES, COAXIALES DIRECTES, NON SÉCANTES.	117
II,4.1. Introduction.	117
II,4.2. Rappel des résultats de l'étude linéarisée.	117
II,4.3. Etude aux ordres supérieurs.	120
II,4.4. Solutions quasi-optimales.	131
II,4.5. Conclusion.	131
II,5. TRANSFERTS IMPULSIONNELS OPTIMAUX ENTRE ORBITES QUASI-CIRCULAIRES PROCHES, COPLANAIRES OU NON.	132
II,5.1. Introduction.	132
II,5.2. Transferts entre orbites quasi-circulaires.	133
II,5.3. Transferts entre orbites elliptiques de faible excentricité.	150
II,5.4. Conclusion.	162
II,6. RENDEZ-VOUS IMPULSIONNELS OPTIMAUX DE LONGUE DURÉE ENTRE ORBITES QUASI-CIRCULAIRES PROCHES, COPLANAIRES OU NON.	163
II,6.1. Introduction.	162
II,6.2. Domaine accessible.	164
II,6.3. Dégénérescences des solutions linéarisées optimales. Solutions à nombre minimal d'impulsions.	170
II,6.4. Conclusion.	185
CONCLUSION.	186
RÉFÉRENCES.	187
ANNEXES.	191 à 235
SOMMAIRE, ABSTRACT, ZUSAMMENFASSUNG, Краткое изложение.	237 à 254

Les numéros des équations et des figures sont relatifs à un chapitre déterminé.
 Lorsqu'ils sont cités dans le texte, ils ne sont précédés du numéro du chapitre que si ce chapitre diffère de celui dans lequel ils sont cités.
 Les numéros entre crochets renvoient aux références.

RÉSUMÉ

Les transferts et rendez-vous optimaux (consommation de masse minimale pour une durée donnée) entre orbites elliptiques proches sont étudiés dans le cas des systèmes de propulsion à vitesse d'éjection constante et à poussée limitée et les performances obtenues sont comparées avec celles relatives aux systèmes de propulsion à vitesse d'éjection modulable et à puissance limitée.

Le choix des éléments orbitaux comme composantes d'état, joint à l'hypothèse de linéarisation, amène d'importantes simplifications (en particulier, l'adjoint est constant). Cela permet d'obtenir un certain nombre de résultats généraux concernant, entre autres, le nombre d'arcs de poussée maximale par révolution, les cas singuliers où la solution linéarisée n'est pas unique mais dégénère en un grand nombre de solutions et les phénomènes d'« induction » (variations non imposées de certains éléments orbitaux induites par les variations imposées des autres éléments orbitaux).

La solution fait appel aux notions de « vecteur efficacité » (indiquant la direction de la poussée optimale), d'« orbite directrice » (lieu, dans les axes absolus, de l'extrémité du vecteur efficacité d'origine le mobile) et de « courbe d'efficacité » (lieu de cette extrémité dans les axes tournants).

La solution analytique est développée dans un certain nombre de cas particuliers présentant un intérêt pratique évident :

- variation infinitésimale optimale du demi-grand axe,
- rotation infinitésimale optimale du plan de l'orbite,
- transferts optimaux entre orbites circulaires coplanaires proches,
- transferts optimaux plans de type Hohmann entre orbites quasi-circulaires proches coaxiales directes, non sécantes (étude aux ordres supérieurs),
- transferts optimaux et rendez-vous de longue durée optimaux entre orbites quasi-circulaires proches coplanaires ou non.

(Voir également le sommaire à la fin).

OPTIMAL TRANSFERS BETWEEN CLOSE ELLIPTICAL ORBITS

SUMMARY

The optimal rendez-vous and transfers (minimum mass consumption for a given duration) between close elliptical orbits are analyzed in the case of propulsion systems characterized by a constant ejection velocity and a limited thrust; the performance obtained is compared to the performance of propulsion systems characterized by a modulable thrust and a limited power.

The choice of the orbital elements as state components, added to the linearization hypothesis, leads to important simplifications (the adjoint vector is constant, in particular). This gives some general results concerning, among others things, the number of maximum thrust arcs per revolution, the singular cases when the linearized solution is not unique but degenerates into a large number of solutions and the "induction" phenomena (non-imposed variations of some orbital elements, induced by the imposed variations of the other orbital elements).

The solution brings in the notions of "efficiency vector" or "primer vector" (indicating the direction of the optimal thrust), of "directrix orbit" (locus in the absolute axes reference system of the efficiency vector extremity originating at the mobile) and of "efficiency curve" (locus of this extremity in the rotating axes system).

The analytical solution is developed in some particular cases presenting an obvious practical interest :

- optimal infinitely small variation of the semi-major axis,
- optimal infinitely small rotation of the orbital plane,
- optimal transfers between close co-planar circular orbits,
- plane optimal transfers of the Hohmann type between non-intersecting direct, co-axial, close near-circular orbits (higher order analysis),
- optimal transfers and optimal long-duration rendez-vous between co-planar or non co-planar, close near-circular orbits.

(See also the longer abstract at the end).

OPTIMALE ÜBERFÜHRUNGEN ZWISCHEN ELLIPTISCHEN, BENACHBARTEN UMLAUFBAHNEN

ZUSAMMENFASSUNG

Die optimale Überführungen und Begegnungen (minimaler Massenverbrauch für eine gegebene Dauer) zwischen elliptischen, benachbarten Umlaufbahnen werden im Falle der Vortriebssysteme mit konstanter Ausschubgeschwindigkeit und begrenztem Schube, untersucht und die erhaltenen Leistungen werden mit jenen verglichen, die sich auf Vortriebssysteme mit modulierbarer Ausschubgeschwindigkeit und begrenzter Leistung beziehen.

Die Wahl der Bahnelemente als Zustandskomponente zusammen mit der Linearisationshypothese zieht bedeutende Vereinfachungen nach sich (insbesondere bleibt der Adjunkt konstant). Das erlaubt eine Anzahl allgemeiner Ergebnisse zu erhalten betreffend, unter anderem, die Zahl der Bogen des maximalen Schubs pro Umlauf, die singularen Fälle, in welchen die linearisierte Lösung nicht einzig ist, sondern in eine grosse Anzahl von Lösungen entartet, und die Erscheinungen der «Induktion» (nicht auferlegte Veränderungen von gewissen Bahnelemente induziert durch auferlegte Veränderungen anderer Bahnelemente).

Die Lösung macht Gebrauch von Begriffen wie : «Wirksamkeitsvektor» (die Richtung des optimalen Schubes angehend), «Leitbahn» (geometrischer Ort des Endpunktes des, vom bewegten Punkte ausgezogenen, Wirksamkeitsvektors im System der absoluten Achsen) und «Wirksamkeitskurve» (geometrischer Ort dieses Endpunktes im System der sich drehenden Achsen).

Die analytische Lösung wird für eine Anzahl besonderer Fälle ausgeführt, deren praktisches Interesse evident ist :

- optimale infinitesimale Veränderung der grossen Halbachse,
- optimale infinitesimale Drehung der Bahnebene,
- optimale Überführungen zwischen kreisförmigen, komplanaren, benachbarten Umlaufbahnen,
- optimale ebene Überführungen vom Hohmann'schen Typus zwischen quasikreisförmigen, koaxialen, direkten, benachbarten, sich nicht schneidenden Umlaufbahnen (Untersuchung höherer Ordnung),
- optimale Überführungen und Begegnungen langer Dauer zwischen quasikreisförmigen, komplanaren oder nicht komplanaren, benachbarten Umlaufbahnen.



Оптимальные переходы между соседними эллиптическими орбитами.

Краткое изложение.

Оптимальные переходы и встречи (минимальный расход массы на единицу времени) между соседними, эллиптическими орбитами изучаются для пропульсивных систем с постоянной скоростью истечения и ограниченной тягой и полученные достижения сравниваются с достижениями относящимися к пропульсивным системам с модулируемой скоростью истечения и с ограниченной мощностью.

Выбор элементов орбиты в качестве составляющих и гипотеза линеаризации влекут за собой значительные упрощения (в частности, придаются постоянным). Это дает возможность получить некоторые общие результаты, касающиеся, кроме всего прочего, количества дуг максимальной тяги на каждый оборот, единичных случаев, в которых линеаризованное решение не единственно, а вырождается в большое количество решений, и явления "индукции" (не навязанные вариации некоторых элементов орбиты индуктированные навязанными вариациями других элементов орбиты).

Решение прибегает к понятиям "вектора эффективности" (указывающего направление оптимальной тяги), "направляющей орбиты" (геометрическое место в абсолютных осях конца вектора эффективности, начало которого подвижная точка) и "кривой эффективности" (геометрическое место этого конца во вращающихся осях).

Аналитическое решение развито в некотором числе частных случаев, которые представляют явный практический интерес:

- оптимальная, бесконечно-малая вариация большой полуоси,
- оптимальное, бесконечно-малое вращение плоскости орбиты,
- оптимальные переходы между круговыми, компланарными, соседними орбитами,
- оптимальные, плоские переходы типа Хохманна между квази-круговыми, соседними, коаксиальными, прямыми, непересекающимися орбитами (изучение высших порядков),
- оптимальные переходы и оптимальные, долгопродолжительные встречи между квази-круговыми, соседними, компланарными или некомпланарными орбитами.

NOTATIONS

- A : apogée,
 A : impulsion accélératrice,
 $\mathcal{A}$: poussée accélératrice,
 a : demi-grand axe,
 $B = \sqrt{\mu/b}$,
 B : matrice définie en (I,3 - 58),
 b : demi-petit axe,
 C : vitesse caractéristique [système (S_1)],
 $\overrightarrow{\Delta C}$: vecteur consommation défini en (II,5 - 19),
 $\overrightarrow{c}$: vecteur fixé (vecteur ligne),
 D : domaine de manœuvrabilité,
 $\mathcal{D}$: impulsion décélératrice,
 $(\mathcal{D})$: courbe directrice,
 $\mathcal{D}$: poussée décélératrice,
 $\overrightarrow{D}$: direction de la poussée,
 E : énergie (par unité de masse),
 $\overrightarrow{e}$: vecteur périégée,
 $e = |\overrightarrow{e}|$: excentricité,
 $\overrightarrow{e}_{p/2n}$: projection de $\overrightarrow{e}$ sur le plan de référence, de composantes α et β sur $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$.
 $\Delta e_{//}$: composante de $\overrightarrow{\Delta e}_{p/2n}$ parallèle à $\overrightarrow{\Delta j}$,
 $\Delta e_{\perp}$: composante de $\overrightarrow{\Delta e}_{p/2n}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{\Delta j}$,
 F : poussée,
 $\mathcal{F}$: frontière au sens strict,
 $\mathcal{F}'$: frontière au sens large,
 $\overrightarrow{F}$: second membre des «équations du mouvement» (vecteur colonne),
 G : matrice définie en (I,3 - 67),
 G : centre de masse,
 $\overrightarrow{g}$: accélération de gravitation,
 $Hou\mathcal{H}$: Hamiltonien,
 $\overrightarrow{h}$: moment cinétique (par unité de masse),

- I_{sp} : impulsion spécifique,
 i : inclinaison,
 J : indice de performance [systèmes (S_2)],
 $\vec{\Delta j}$: vecteur rotation du plan de l'orbite,
 K : matrice donnée en Annexe 3,
 L : ascension droite (géocentrique) ou longitude écliptique (héliocentrique),
 $L_e = (\vec{Ox}, \vec{Pe})$
 $L_z = (\vec{Ox}, \vec{Pz})$
 $(\mathcal{L})$: lieu de l'extrémité E de $\vec{e}_{plan}$,
 M : anomalie moyenne,
 $\mathcal{M}$: mobile,
 m : masse,
 N : nombre de révolutions,
 n : moyen mouvement,
 n : nombre d'arcs de poussée maximale,
 n_1 : nombre d'arcs de poussée maximale par révolution,
 $O(\varepsilon)$: ordre de ε $\left(\frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \text{limite finie} \neq 0 \right)$
 $O(\varepsilon)$: ordre supérieur à ε $\left(\frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \right)$
 $(\mathcal{O})$: orbite osculatrice,
 $(\mathcal{O}p)$: orbite directrice osculatrice,
 P : puissance,
 P : périégée,
 $\mathcal{P}$: mobile pilote,
 $(\mathcal{P})$: courbe d'efficacité,
 $\vec{P}$: adjoint cinématique (vecteur ligne),
 $\vec{p}$: vecteur adjoint (vecteur ligne),
 p : « paramètre » de l'orbite,
 $\vec{P}_v$: vecteur efficacité (vecteur ligne),
 q : débit,
 $q = P_2/P_e$,
 $\vec{R}$: vecteur défini en (I,3 - 29),
 $\vec{r}$: rayon vecteur,
 (S) : système de propulsion général,
 (S_1) : système de propulsion à vitesse d'éjection constante et poussée limitée,
 (S_2) : système de propulsion à vitesse d'éjection modulable et puissance limitée,
 S : indice de performance,
 T : période,
 $(\mathcal{T})$: trajectoire,
 $\Delta \mathcal{T}$: défini en (II,6 - 5),
 $-U$: potentiel,

$U(x)$: échelon unité = $\frac{1}{2}(1 + \text{signe } x)$,

$\mathcal{U}$: « domaine de commande »,

$\vec{u}$: vecteur commande,

u : anomalie excentrique, $\left(\text{tg } \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{tg } \frac{v}{2} \right)$,

$\vec{V}$: vitesse,

(V) : Fenêtre de Viviani,

V : point de la Fenêtre de Viviani,

v : anomalie vraie,

W : vitesse d'éjection,

w : $L - L_e$,

$\vec{x}$: « état cinématique » (vecteur colonne),

$\vec{x}$: vecteur « état » (vecteur colonne),

$\vec{Z} = \vec{h}/h$,

$\vec{Z}_{plan}$: projection de $\vec{Z}$ sur le plan de référence, de composantes ξ et η sur $\vec{Ox}$ et $\vec{Oy}$,

$Oxyz$: axes fixes,

$OXYZ$: axes tournants,

$\alpha = \vec{x} \cdot \vec{e}$,

$\beta = \vec{y} \cdot \vec{e}$,

$\vec{\gamma}$: accélération de poussée (vecteur colonne),

$\gamma = |\vec{\gamma}|$,

Δ : variation totale,

δ : différence entre l'« état » et l'« état nominal »,

$\delta = (\delta \vec{x}, \Delta \vec{j})$,

ε : importance du transfert,

ζ : variation réduite,

$\eta = \vec{y} \cdot \vec{Z}$,

$\oplus$: fonction de commutation,

θ : argument,

$\lambda = \Delta \mathcal{X} / F_{max} \Delta t$,

Λ : ascension droite (géocentrique) ou longitude écliptique (héliocentrique) du périhélie,

μ : (constante de la gravitation universelle) $\times$ (masse du corps attractif),

$\xi = \vec{x} \cdot \vec{Z}$,

$\vec{\rho} = \vec{r} + \vec{\rho}_v \tau$,

(Σ) : sphère de centre $\mathcal{M}$ et de rayon unité,

τ : variable d'état remplaçant le temps t ,

v : variation spécifique,

φ : angle au centre des arcs de poussée,

ψ : angle de la poussée avec l'horizontale locale,

ω : argument du périée,

Ω : ascension droite du nœud ascendant,

$()_o$: initial,

$()_f$: final,

$\overline{()}$: nominal,

$()^*$: optimal,

$()^T$: transposition d'une matrice,

∇ : opérateur nabla $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (opérateur ligne).



INTRODUCTION

Le problème des transferts et des rendez-vous optimaux entre orbites est fondamental en dynamique spatiale.

Ces études, relativement nouvelles, font appel à la fois à la « Mécanique Céleste » classique [1] et aux méthodes modernes d'optimisation [2 - 6] dérivées du « Calcul des Variations ».

Les résultats analytiques obtenus, dont les tout premiers remontent à 1925 [7], concernent d'abord les transferts optimaux de *durée indifférente*, dans un champ de gravitation central, réalisés à l'aide d'un système de propulsion à vitesse d'éjection constante, en général capable de fournir des impulsions. Les études initiales [7 - 9] supposaient le nombre d'impulsions fixé à l'avance, alors que dans les études récentes [4, 10-19], ce nombre constitue, en général, l'un des résultats, particulièrement important [20], de l'optimisation.

Les nouveaux progrès réalisés dans ce domaine sont essentiellement dus à l'utilisation des éléments orbitaux comme composantes d'état, de la vitesse caractéristique comme variable indépendante et à l'emploi de la notion de « domaine de manoeuvrabilité » de CONTENSOU [2-4].

Le problème des transferts optimaux de *durée fixée* entre orbites *éloignées* reste très difficile à résoudre, bien qu'un certain nombre de résultats généraux aient été obtenus [21-30].

Dans le cas des systèmes de propulsion à vitesse d'éjection constante, les arcs singuliers à « poussée intermédiaire » [31-33] ont été l'objet d'une attention particulière.

D'autre part, dans le cas des systèmes de propulsion à « faible accélération » (propulsion électrique), il existe de nombreuses études numériques [34, 35].

Un net progrès dans l'étude analytique du problème a cependant été fait dans le cas relativement favorable d'un système de propulsion à *puissance limitée et à vitesse d'éjection modulable*, où ROSS et LEITMANN [36] puis EDELBAUM [37] ont donné la solution, respectivement, du transfert le plus général et du rendez-vous le plus général entre orbites elliptiques *proches*. GOBETZ a d'autre part étudié le cas du transfert entre orbites circulaires proches [38] et, plus récemment, du rendez-vous entre orbites quasi-circulaires proches [39], pour ce même type de propulseur.

EDELBAUM a d'ailleurs pu étendre, par intégration, les résultats de l'étude linéarisée à certains transferts entre orbites éloignées, pour un grand nombre de révolutions [40].

Dans le cas d'un système de propulsion à *puissance limitée et à vitesse d'éjection constante* (et, à la limite, dans le cas d'un système de propulsion capable de délivrer des impulsions) l'étude reste délicate même pour des orbites proches.

A part l'excellente étude de Mc. INTYRE et CROCCO concernant les transferts entre orbites circulaires coplanaires proches [41-44] ce problème a été, jusqu'à présent, peu travaillé.

La présente publication résume et complète les résultats obtenus par l'auteur sur ce sujet [45-

47]. Le cas des transferts impulsionnels optimaux entre orbites quasi-circulaires non coplanaires proches [47] a été parallèlement étudié par GOBETZ , WASHINGTON et EDELBAUM [48, 49].

L'étude analytique des transferts infinitésimaux est intéressante pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, de tels transferts ont un intérêt propre non négligeable. On les rencontre très souvent dans la pratique. Ils sont évidemment associés aux problèmes de correction des trajectoires [50, 51].

D'autre part, il existe un accord qualitatif et même quantitatif acceptable entre la solution optimale relative à un transfert fini, calculée numériquement, et la solution du problème linéarisé associé à ce transfert, obtenue analytiquement, du moins si les orbites de départ et d'arrivée ne sont pas exagérément éloignées.

Enfin, la solution linéarisée constitue une excellente première approximation pour le calcul numérique de la solution optimale par approximations successives. Son utilisation réduit considérablement le nombre des itérations et peut, d'autre part, éviter de converger sur des optimums locaux inintéressants, en fournissant, dès le départ, une loi de commande très proche de la loi optimale [55].

*
* *

La présente étude comporte deux Parties :

La Première Partie est une étude générale où la méthode d'optimisation est exposée et appliquée au problème des transferts infinitésimaux optimaux.

La Deuxième Partie traite un certain nombre de cas particuliers pour lesquels l'étude analytique peut être poussée plus avant et qui présentent un intérêt pratique évident.



I - ÉTUDE GÉNÉRALE

Après un court rappel de la méthode d'optimisation utilisée, le problème général des transferts optimaux est défini et plus particulièrement étudié dans le cas d'un champ de gravitation central et de faibles écarts (linéarisation). Un certain nombre de résultats généraux sont obtenus, notamment en ce qui concerne les découplages entre les variations optimales des différents éléments de l'orbite.

I,1. THÉORIE DU "DOMAINE DE MANŒUVRABILITÉ" DE CONTENSOU ET "PRINCIPE DU MAXIMUM" DE PONTRYAGIN

Il ne s'agit pas de donner ici une démonstration complète et rigoureuse du "Principe du Maximum" de PONTRYAGIN telle qu'elle figure par exemple dans les références [5] et [6], mais de rappeler son énoncé et d'en donner une démonstration simplifiée dans le cas linéaire, en faisant appel à la théorie d'optimisation de CONTENSOU [2-4]. Cette démonstration suffit pour l'étude au premier ordre des transferts entre orbites proches.

I,1.1. DÉFINITIONS.

Soit un système évolutif défini à chaque instant t par la donnée de l'"état" $\vec{x}$, vecteur colonne à n composantes x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) satisfaisant aux "équations du mouvement" :

$$(1) \quad \vec{V} = \dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{u}, t)$$

$\vec{u}$ est le vecteur "commande" à r composantes u_k ($k = 1, 2, \dots, r$), fonctions arbitraires du temps, pas forcément continues (ce qui rend délicate l'application du "Calcul des Variations" classique), soumises éventuellement à des contraintes d'inégalité obligeant l'extrémité du vecteur $\vec{u}$ à appartenir à un certain "domaine de commande" $\mathcal{U}$,

$$(2) \quad \vec{u} \in \mathcal{U}.$$

Si l'état initial $\vec{x}_0$ est fixé :

$$(3) \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

et si une loi de commande $\vec{u}(t)$ admissible est donnée a priori, l'intégration du système (1)

à partir de l'instant initial t_0 permet, en général, de déterminer la "trajectoire" $(\mathcal{T})$ c'est-à-dire l'état $\vec{x}(t)$ à chaque instant t ultérieur et en particulier à l'instant final fixé t_f (l'état final $\vec{x}_f$ est supposé, pour l'instant, entièrement libre).

La fonction linéaire^(*) des composantes de l'état final (*indice de performance*) :

$$(4) \quad S = \vec{c} \cdot \vec{x}_f$$

(où $\vec{c}$ est un vecteur ligne constant donné, à n composantes c_i) prend alors une valeur bien déterminée.

Si maintenant le choix de la loi de commande $\vec{u}(t)$ dans $\mathcal{U}$ est arbitraire, S est une fonctionnelle de cette loi et il est possible d'envisager le problème d'optimisation ci-dessous :

I,1.2. ÉNONCÉ DU PROBLÈME D'OPTIMISATION.

Déterminer la (ou les) loi(s) de commande $\vec{u}(t)$ admissible(s) [c'est-à-dire, respectant la contrainte (2)] qui maximise(nt) *localement* l'indice de performance S .

A une telle loi correspond une trajectoire optimale $(\mathcal{T})$ conduisant à un point (F_1, F_2 ou F_3) de la "frontière au sens large" $\mathcal{F}'(t_f)$ du "domaine accessible" $\mathcal{A}(t_f)$ à l'instant t_f [2-4] (fig. 1).

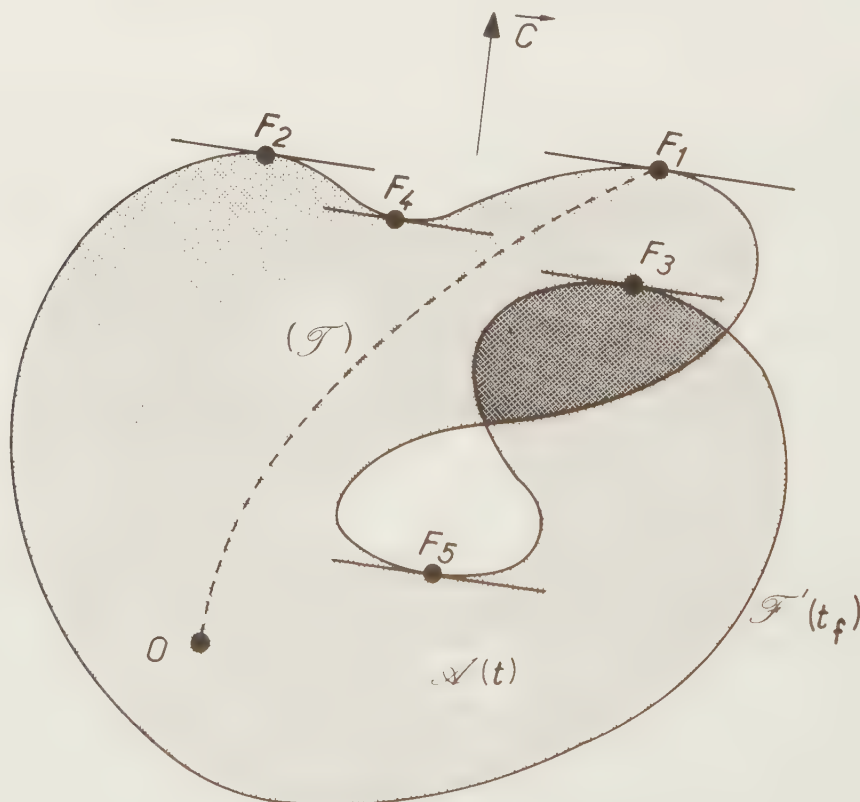


Fig. 1 - Domaine accessible.

(*) Cette condition n'est pas aussi restrictive qu'elle le paraît. Il est possible de ramener à ce cas la plupart des problèmes d'optimisation.

Il faut ensuite comparer directement entre elles les différentes solutions localement optimales telles que F_1 , F_2 et F_3 pour ne retenir que celle (F_1) assurant le maximum absolu de l'indice de performance S . Les solutions telles que F_3 , qui ne correspondent pas à un point de la "frontière au sens strict" $\mathcal{F}(t_f)$ sont ainsi automatiquement éliminées.

L'application du "Principe du Maximum" introduit, en général, des solutions parasites supplémentaires qui correspondent à des minimums locaux (ou des cols) tels que F_4 et F_5 [11].

Le choix convenable d'une trajectoire $\vec{x}(t) + \delta \vec{x}(t)$ voisine de la trajectoire $\vec{x}(t)$ conduisant en l'un de ces points, permet d'obtenir un accroissement de S seulement d'ordre supérieur à $|\delta \vec{x}|$.

I,1.3. DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE DU "PRINCIPE DU MAXIMUM".

I,1.3.1. "DOMAINE DE MANŒUVRABILITÉ".

Le "domaine de manœuvrabilité" $D(\vec{x}, t)$ dans l'état $\vec{x}$, à l'instant t , est constitué par l'ensemble des points $\vec{x} = \vec{V}$ de l'espace hodographe parmi lesquels peut être choisi le point de fonctionnement.

Le "domaine de manœuvrabilité" $D(\vec{x}, t)$ est donc le transformé du "domaine de commande" $\mathcal{U}$ défini plus haut, par la transformation $\vec{u} \Rightarrow \vec{V}$ définie par l'équation (1).

Le "domaine de commande" de la théorie de PONTYAGIN est une notion utile pour les applications pratiques de la théorie d'optimisation. Pour les démonstrations et l'interprétation géométrique des résultats, il est préférable de faire appel à la notion de "domaine de manœuvrabilité" de CONTENSOU.

Le choix de $\vec{V}$ à l'intérieur du "domaine de manœuvrabilité" est entièrement libre. Il est donc en particulier indépendant des choix antérieurs : le vecteur $\vec{V}$ n'est astreint à aucune espèce de continuité.

Par contre, nous supposons remplies les conditions de régularité requises pour écrire les différentes équations qui suivent.

I,1.3.2. ÉNONCÉ DU "PRINCIPE DU MAXIMUM".

Une condition nécessaire pour que la trajectoire $\vec{x}(t)$ soit optimale est que à chaque instant le vecteur $\vec{V}$ soit choisi dans le domaine $D(\vec{x}, t)$ de façon que l'Hamiltonien :

$$(5) \quad H = \vec{p} \cdot \vec{V}$$

soit maximal. $\vec{p}$ est un vecteur ligne à n composantes p_i , "adjoint" à l'état $\vec{x}$, défini de la façon suivante :

$\vec{p}$, $\vec{x}$ et t étant donnés, la valeur maximale $H^* = \vec{p} \cdot \vec{V}^*$ de H par rapport à $\vec{V}$ n'est fonction que de $\vec{p}$, $\vec{x}$, t (fig. 2).

Le vecteur adjoint $\vec{p}$ doit satisfaire au "système adjoint" :

$$(6) \quad \dot{\vec{p}} = -\nabla H^* \quad \left(\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right] \right)$$

et aux conditions finales :

$$(7) \quad \vec{p}_f = \vec{c}$$

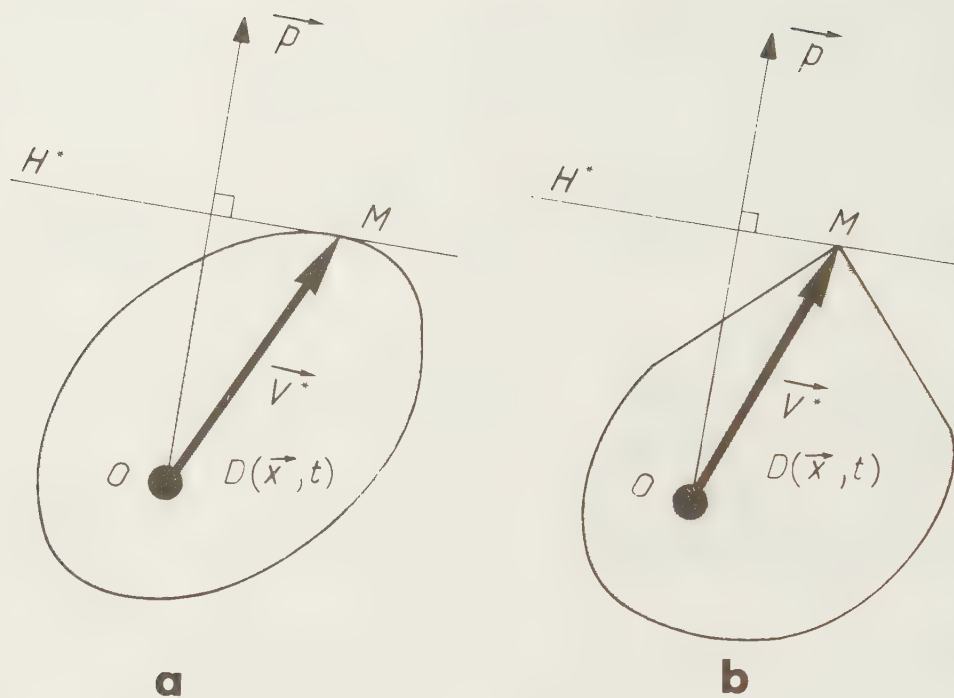


Fig. 2 - Domaine de manoeuvrabilité. Condition du maximum.

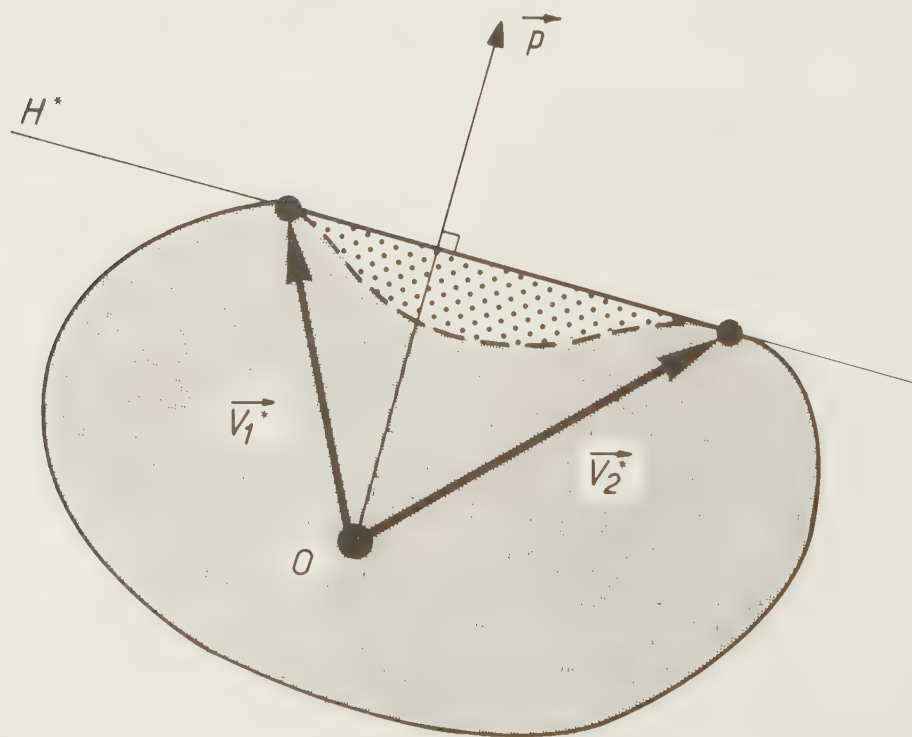


Fig. 3 - «Convexisation» du domaine de manoeuvrabilité.

La condition du maximum montre que seuls sont utilisés des points de la frontière du domaine de manoeuvrabilité $\mathcal{D}$, et même, de façon plus précise, des points communs à la frontière du domaine $\mathcal{D}$ et au plus petit contour convexe entourant $\mathcal{D}$ (fig. 2 et 3).

I,1.3.3. DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE.

Soit une trajectoire $\vec{x}(t)$ non nécessairement optimale correspondant au choix $\vec{V}(t)$ de $\vec{V}$ à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}(\vec{x}, t)$ (fig. 4). Il est possible de définir un adjoint $\vec{p}(t)$ comme au paragraphe précédent en intégrant à rebours l'équation (6) à partir des conditions (7) (H^* est remplacé par H et $\vec{V}^*$ par $\vec{V} + \delta\vec{V}_1$).

Soit $\vec{x}(t) + \delta\vec{x}(t)$ une trajectoire voisine. Nous nous proposons d'évaluer :

$$(8) \quad \frac{d}{dt} (\vec{p} \cdot \delta\vec{x}) = \dot{\vec{p}} \cdot \delta\vec{x} + \vec{p} \cdot \delta\dot{\vec{x}} = -(\nabla \cdot H) \cdot \delta\vec{x} + \vec{p} \cdot \delta\vec{V}_1 + \vec{p} \cdot \delta\vec{V}_2 + \vec{p} \cdot \delta\vec{V}_3$$

$\delta\vec{V}_2$ peut être grand (commutation, fig. 6), mais

$$(9) \quad \vec{p} \cdot \delta\vec{V}_2 = \delta H = (\nabla \cdot H) \delta\vec{x} + o(|\delta\vec{x}|)$$

où $o(\varepsilon)$ signifie : ordre supérieur à ε $\left(\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \right)$. Donc :

$$(10) \quad \frac{d}{dt} (\vec{p} \cdot \delta\vec{x}) = \vec{p} \cdot \delta\vec{V}_1 + \vec{p} \cdot \delta\vec{V}_3 + o(|\delta\vec{x}|)$$

où, par définition (fig. 4), $\vec{p} \cdot \delta\vec{V}_1 \geq 0$ et $\vec{p} \cdot \delta\vec{V}_3 \leq 0$.

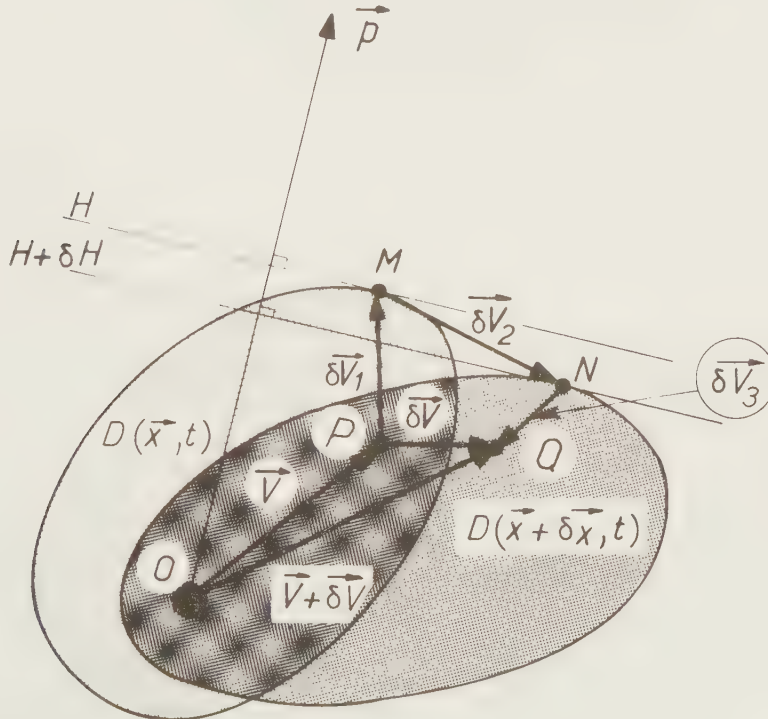


Fig. 4 - Domaines de manoeuvrabilité relatifs à deux états voisins.

La condition du maximum est une *condition nécessaire* pour que la trajectoire $\vec{x}(t)$ soit optimale.

En effet, appelons t_2 le dernier instant au-delà duquel la condition du maximum ($\delta \vec{V}_1 = 0$) est toujours réalisée ($t_0 = 0 < t_2 \leq t_f = 1$) et t_1 un instant légèrement antérieur ($t_2 - t_1 = \tau$ petit). (fig. 5).

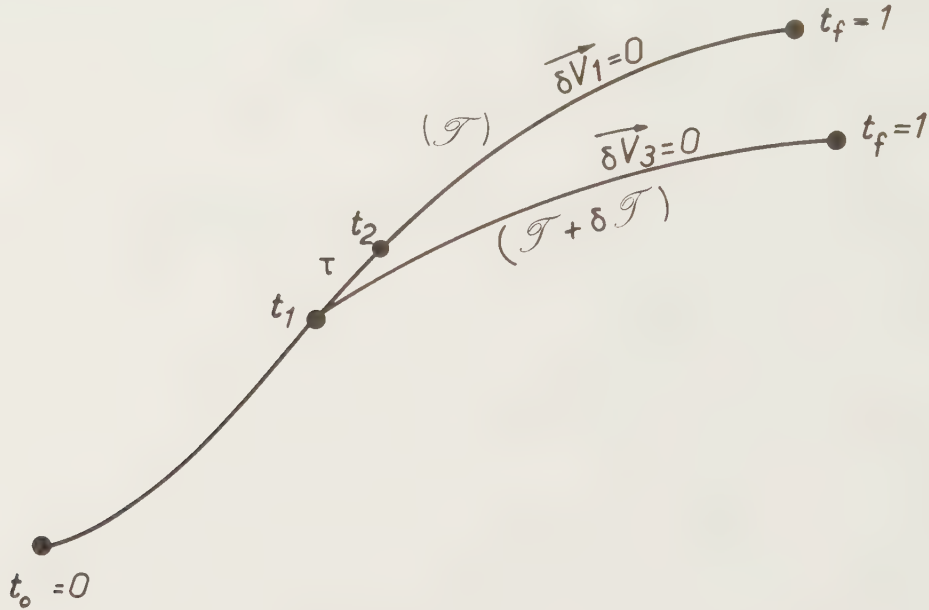


Fig. 5 - Démonstration de la condition nécessaire.

Choisissons à partir de l'instant t_1 une trajectoire voisine telle que $\delta \vec{V}_3 = 0$ et intégrons (10) de t_1 à t_f . L'accroissement de l'indice de performance S est :

$$(11) \quad \delta S = \vec{c} \cdot \delta \vec{x}_f = \vec{p}_f \cdot \delta \vec{x}_f = \underbrace{\vec{p}_1 \cdot \delta \vec{x}_1}_{=0} + \int_{t_1}^{t_2} \vec{p} \cdot \delta \vec{V}_1 + \int_{t_1}^{t_f} o(|\delta \vec{x}|) dt =$$

$$\tau (\vec{p} \cdot \delta \vec{V}_1)_{\text{moyen sur } t_1, t_2} + \int_{t_1}^{t_f} o(|\delta \vec{x}|) dt.$$

L'évaluation de cette dernière intégrale étant délicate dans le cas général, la condition nécessaire ne sera démontrée que dans le cas simple des "systèmes linéaires" du type :

$$(12) \quad \dot{\vec{x}} = \vec{f} = a(t) \vec{x} + \vec{b}(\vec{u}, t)$$

où $a(t)$ est un tenseur.

Dans ce cas, l'intégrale est nulle, car H est linéaire en $\vec{x}$ lorsqu'on passe du point M au point N de la figure 4. En effet, $\vec{u}$ est le même en ces deux points, donc $\vec{f}$ est linéaire en $\vec{x}$.

Alors

$$(13) \quad \delta S = \tau (\vec{p} \cdot \delta \vec{V}_1)_{\text{moyen sur } t_1, t_2} > 0$$

Donc S peut être augmenté en choisissant une trajectoire voisine. La trajectoire initiale n'est donc pas optimale.

La condition du maximum n'est pas, en général, une *condition suffisante*.

En effet, supposons qu'elle soit remplie à chaque instant, c'est-à-dire que $\delta \vec{V}_1 \equiv 0$.

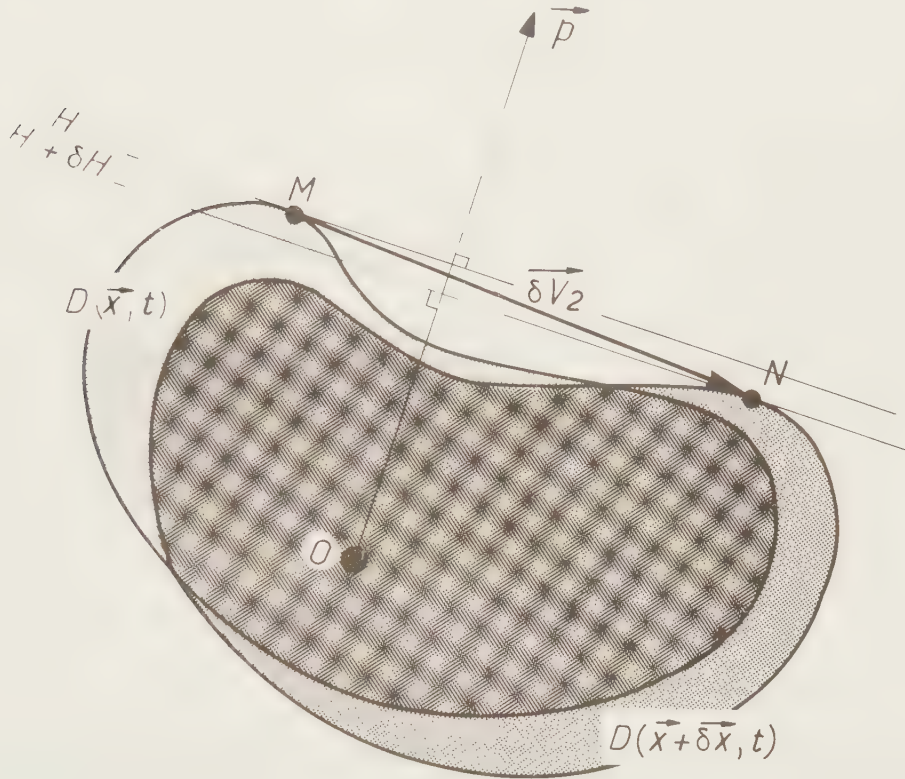


Fig. 6 - Commutation.

L'intégration de (10) de t_0 à t_f donne :

$$(14) \quad \delta S = \vec{p}_f \cdot \delta \vec{x}_f = \underbrace{\vec{p}_0 \cdot \delta \vec{x}_0}_{=0} + \int_{t_0}^{t_f} \vec{p} \cdot \delta \vec{V}_3 + \int_{t_0}^{t_f} o(|\delta \vec{x}|) dt.$$

Considérons une trajectoire voisine obtenue en choisissant $\delta \vec{V}_3$ tel que $|\vec{p} \cdot \delta \vec{V}_3| = o(|\delta \vec{x}|)$. Cela est possible en prenant, par exemple, le point Q de la figure 4 sur la surface du domaine $D(\vec{x} + \delta \vec{x}, t)$ et au voisinage du point N , sur les portions de trajectoire correspondant au cas de figure 2 a, et en prenant Q en N , sur les portions correspondant au cas de figure 2 b. Les deux intégrales de (14) peuvent être du même ordre. On voit que S peut subir une variation δS dont le signe n'est pas déterminé et, en particulier, peut subir un accroissement $\delta S > 0$, mais seulement d'ordre supérieur à $|\delta \vec{x}|$. L'application du Principe du Maximum peut conduire, en général, à des solutions parasites telles que F_4 et F_5 (fig. 1).

La condition du maximum est cependant une condition suffisante (donc, une condition *nécessaire et suffisante*) lorsque la seconde intégrale de (14) est nulle. En effet, choissant $\delta \vec{V}_3$ de façon quelconque admissible et tel que la trajectoire voisine $\vec{x}(t) + \delta \vec{x}(t)$ ne s'éloigne pas trop de la trajectoire nominale $\vec{x}(t)$, l'équation (14) montre que δS est toujours < 0 puisque $\vec{p} \cdot \delta \vec{V}_3$ est toujours ≤ 0 .

La condition du maximum est donc nécessaire et suffisante pour les "systèmes linéaires" du type (12).

I,1.3.4. CONCLUSION.

Le problème d'optimisation énoncé au § I,1.2. se résout donc ainsi : l'application de la condition du maximum (H maximum absolu à chaque instant par rapport à $\vec{V} \in D$ donc par rapport à $\vec{u} \in \mathcal{U}$) fournit la commande optimale $\vec{V}^*$ ou $\vec{u}^*$ qui est portée dans le système (1) des équations du mouvement et dans le système adjoint (6). Ces $2n$ équations différentielles sont intégrées compte tenu des $2n$ conditions aux limites (3) et (7).

Il est important de remarquer que si la composante x_{if} de l'état final est *indifférente* (donc n'est pas fixée et ne figure pas dans S), la composante C_i correspondante de $\vec{C}$, et donc la composante p_{if} correspondante de l'adjoint final $\vec{p}_f$ est nulle.

D'autre part, il est possible de démontrer que si la composante x_{if} de l'état final est *fixée*, la composante p_{if} correspondante de l'adjoint final n'est pas imposée *a priori*. La condition numéro i de (7) est remplacée par la condition : x_i fixé, ce qui ne modifie pas le nombre des conditions aux limites.

I,1.4. INTERPRÉTATION DU VECTEUR ADJOINT.

Les équations (11) et (14) montrent que l'adjoint est, à chaque instant, le *coefficient d'influence* d'une variation $\delta \vec{x}$ de l'état sur l'indice de performance S . Si certaines composantes x_{if} de l'état final sont fixées, cela n'est vrai que si la variation $\delta \vec{x}$ est *compatible avec ces contraintes finales*.

Notons que le vecteur adjoint $\vec{p}$ n'est défini qu'à un facteur multiplicatif près par le système homogène (6) et la condition S maximum. Il est en effet équivalent de maximiser S ou kS ($k > 0$ arbitraire) c'est-à-dire de choisir $\vec{C}$ ou $k\vec{C}$. L'équation (7) constitue donc la condition de normalisation de l'adjoint $\vec{p}$.

I,1.5. INTÉGRALE PREMIÈRE DE L'HAMILTONIEN.

Nous avons vu au § I,1.3.2. que l'Hamiltonien optimal H^* est une fonction de $\vec{p}$, $\vec{x}$ et t . Nous nous proposons de calculer sa dérivée par rapport au temps sur une trajectoire optimale :

$$(15) \quad \frac{dH^*(\vec{p}, \vec{x}, t)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{V}^* + (\nabla \cdot H^*) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial H^*}{\partial t}$$

d'où, compte tenu de (6) :

$$(16) \quad \frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial t}.$$

Lorsque le domaine de manœuvrabilité $D(\vec{x}, t)$ ne dépend pas du temps, $\frac{\partial H^*}{\partial t} = 0$ et on obtient l'intégrale première de l'Hamiltonien :

$$(17) \quad H^* = \text{Cte}.$$

* *
* *

La méthode d'optimisation décrite plus haut va, à présent, être appliquée au problème des transferts optimaux et plus précisément au problème des transferts optimaux proches (cas linéaire).

I,2. PROBLÈME DES TRANSFERTS OPTIMAUX

Avant d'aborder le cas particulier des transferts entre orbites proches, il est utile de donner quelques résultats concernant le problème général des transferts optimaux.

Après avoir défini la notion de transfert, et analysé les différents systèmes de propulsion, le Principe du Maximum est appliqué aux transferts optimaux dans un champ de gravitation quelconque, ce qui met nettement en lumière les différences entre les solutions correspondant aux divers systèmes de propulsion.

Toutes ces solutions font cependant appel à la même notion de "vecteur efficacité" $\vec{p}_V$ ("Primer vector" de LAWDEN [21]), indiquant la direction optimale de poussée, qui est largement utilisé et interprété géométriquement : ce vecteur a pour origine le mobile $\mathcal{M}$ et pour extrémité un mobile "pilote" $\mathcal{P}$, proche de $\mathcal{M}$, soumis à la même accélération de poussée et au même champ de gravitation que $\mathcal{M}$, et décrivant une "courbe directrice" ($\mathcal{D}$) proche de la trajectoire ($\mathcal{T}$) de $\mathcal{M}$.

Lorsque le champ de gravitation ne dépend pas du temps, le cas des transferts sans rendez-vous est envisagé.

L'hypothèse du champ central est alors faite pour aller plus avant dans l'étude analytique. Dans ce cas, l'intérêt de l'emploi des éléments de l'orbite képlérienne osculatrice ($\mathcal{O}$) à la trajectoire à chaque instant comme composantes de l'état est évident. La notion d'"orbite directrice" ($\mathcal{OP}$) donne une interprétation intéressante de la loi de poussée optimale.

I,2.1. DÉFINITIONS.

On appelle, de façon très générale, "transfert" (avec rendez-vous), d'un mobile $\mathcal{M}$ de masse variable soumis à un champ de gravitation $\vec{g}(\vec{r}, t) = \vec{\text{grad}} U(\vec{r}, t)$ donné dérivant du potentiel $-U(\vec{r}, t)$, et à une accélération de poussée $\vec{\gamma}$ (commande), tout changement de position $\vec{r}$ et de vitesse $\vec{V}$ de ce mobile entre deux instants fixés t_0 et t_f (fig. 1), le changement produit par le simple mouvement naturel ($\vec{\gamma} = 0$) pouvant être qualifié de transfert de coût nul.

Si le champ $\vec{g}$ ne dépend pas du temps t , il est possible de définir des "orbites" généralisées correspondant aux mouvements naturels de mobiles $\mathcal{M}$ lancés de positions initiales $\vec{r}_0$ avec des vitesses initiales $\vec{V}_0$, une telle "orbite" ne dépendant que des conditions initiales $\vec{r}_0, \vec{V}_0$. Il est alors possible de définir des transferts *sans rendez-vous*, lorsque seule l'"orbite" finale à l'instant t_f est imposée, sans que la position finale $\mathcal{M}_f$ du mobile sur cette "orbite" soit imposée.

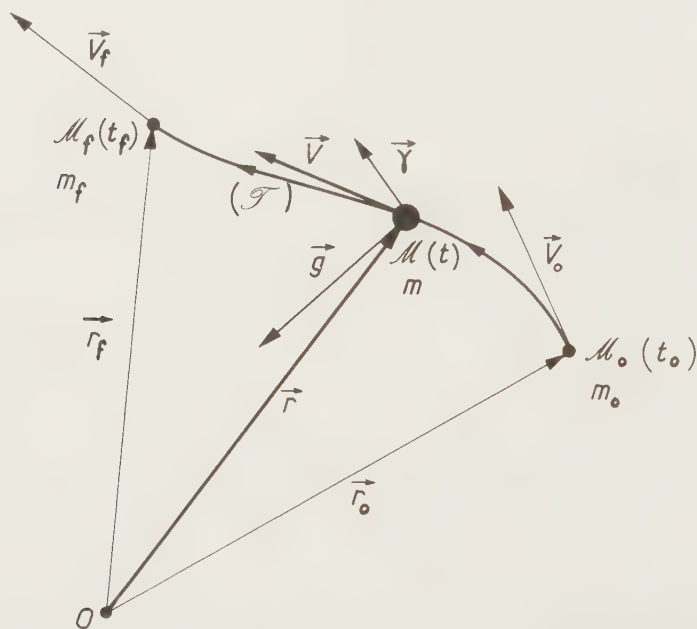


Fig. 1 - Transfert.

L'état $\vec{x}$ du mobile $\mathcal{M}$ à l'instant t peut être défini par la donnée des éléments cinématiques $\vec{r}, \vec{V}$ et de la masse m . Le transfert est donc le passage de l'état $\vec{r}_0, \vec{V}_0, m_0$ à l'instant t_0 à l'état $\vec{r}_f, \vec{V}_f, m_f$ à l'instant t_f (l'état "cinématique" final $\vec{r}_f, \vec{V}_f$ pouvant être partiellement indéterminé).

Il est évidemment désirable de réaliser le transfert précédemment défini de la manière la plus économique possible, l'économie pouvant être définie en fonction d'un nombre plus ou moins grand de critères.

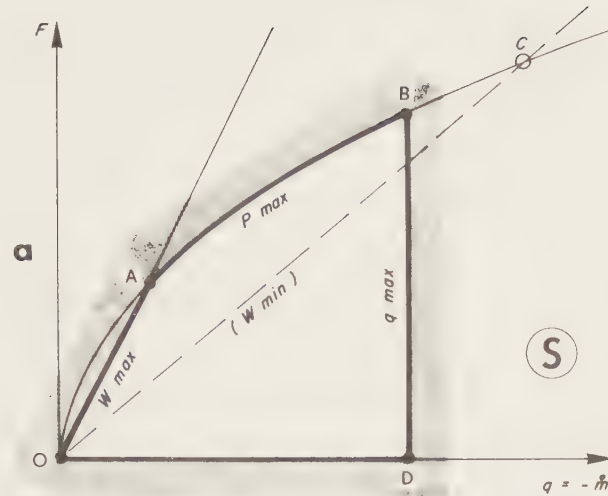
Le critère le plus souvent retenu est celui de l'économie du propulsif éjecté par la fusée pour produire l'accélération de poussée $\vec{\gamma}$.

Rappelons, en effet, l'équation de propulsion :

$$(1) \quad F = qW$$

où F est la force de poussée, $q = -\dot{m}$ le débit de propulsif et W la vitesse d'éjection.

Il s'agit donc, pour chaque mission envisagée, de minimiser la consommation de propulsif $|\Delta m| = |m_f - m_0|$ pour une durée $\Delta t = t_f - t_0$ fixée.



I,2.2. SYSTÈMES DE PROPULSION.

Sans rentrer dans le détail des systèmes de propulsion présents et futurs, il s'agit de définir un modèle mathématique simple, si possible unique, les décrivant tous et pouvant être adapté, par une simple modification de paramètres, à chaque cas particulier.

Dans le modèle (S) proposé, le choix de la direction $\vec{D}$ de la poussée est supposé entièrement libre et les deux paramètres de commande restants F (grandeur de la poussée) et q (débit) doivent être choisis à l'intérieur "du domaine de commande" $\mathcal{U}$ représenté sur la figure 2 a.

Dans ce modèle (S), la puissance du jet :

$$(2) \quad P = \frac{1}{2}(-\dot{m}) W^2 = \frac{F W}{2} = \frac{F^2}{2q}$$

est limitée :

$$(3) \quad P \leq P_{\max}$$

d'où l'arc de parabole frontière $\widehat{AB}$ (ou $\widehat{AC}$)

La vitesse d'éjection :

$$(4) \quad W = \frac{F}{q}$$

ainsi que le débit q sont bornés supérieurement :

$$(5) \quad W \leq W_{\max}$$

$$(6) \quad q \leq q_{\max}$$

d'où les frontières rectilignes OA et BD .

Il est également possible d'imposer une borne inférieure $W_{\min} > 0$ à la vitesse d'éjection

$$(7) \quad W \geq W_{\min}$$

ce qui ajoute une frontière rectiligne OC . Le point C peut se trouver sur l'arc $\widehat{AB}$ ou à l'extérieur de cet arc; l'étude théorique est la même.

Notons que la grandeur F de la poussée est automatiquement bornée supérieurement :

$$(8) \quad F \leq F_{\max} = \min(F_B, F_C).$$

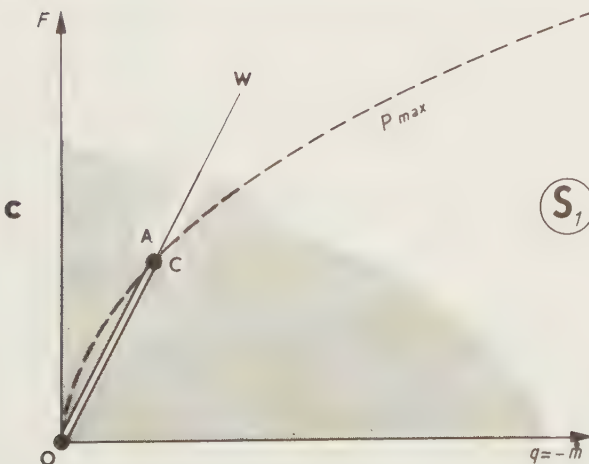
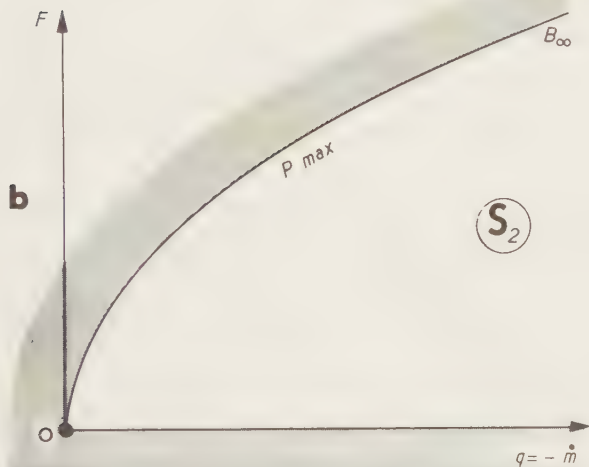


Fig. 2 - Systèmes de propulsion.

Ce modèle (S) est bien adapté aux systèmes de propulsion électrique évolués où la puissance du jet est limitée par la puissance du générateur

électrique, où la vitesse d'éjection, modulable dans une certaine mesure, ne peut pas, pour un éjecteur déterminé, dépasser une certaine valeur maximale (et souvent descendre au-dessous d'une certaine valeur minimale) sous peine de voir le rendement de l'éjecteur diminuer considérablement, et enfin où le débit de propulsif est limité par le système de pompes (ou encore, le système de production d'ions, dans le cas d'un propulseur ionique).

Le modèle (S_2) qui dérive du modèle (S) en faisant

$$(9) \quad W_{max} = \infty, \quad q_{max} = \infty, \quad W_{min} = 0$$

correspond à un propulseur électrique *idéalisé* (fig. 2 b) souvent considéré dans les études théoriques, où la seule limitation porte sur la puissance du jet.

Enfin, le modèle (S_1) qui dérive du modèle (S) en faisant :

$$(10) \quad W_{max} = W_{min} = W$$

correspond à la fois aux propulseurs électriques à vitesse d'éjection non modulable et aux propulseurs chimiques classiques (liquides, poudres) ou à la fusée nucléaire (fig. 2 c). Ces différents types de propulseurs se distinguent alors par les ordres de grandeur de l'impulsion spécifique

$$I_{sp} = W/g \quad \text{et de la poussée maximale } F_{max}.$$

Alors que pour les propulseurs chimiques classiques, l'impulsion spécifique est de l'ordre de 300 s (poudres) ou 400 s (liquides) et pour la fusée nucléaire, de l'ordre de 800 s, pour les propulseurs électriques l'impulsion spécifique peut atteindre des valeurs très élevées (10 000 s et même plus).

Par contre, l'accélération maximale de poussée $\gamma_{max} = F_{max}/m$, qui est de l'ordre de g ou de quelques g pour les propulseurs classiques, (Systèmes dits : "à forte poussée") est très faible (10^{-4} à $10^{-3} g$) pour les propulseurs électriques (Systèmes dits : "à faible poussée").

I,2.3. CAS DU CHAMP DE GRAVITATION QUELCONQUE.

L'état $(\vec{r}, \vec{V}, m)$ et la commande $(\vec{D}, F, q)$ ayant été définis dans les précédents paragraphes, appliquons le Principe du Maximum au problème de transfert envisagé plus haut, consistant à passer de l'état $\vec{r}_0, \vec{V}_0, m_0$ à l'instant t_0 fixé à l'état $\vec{r}_f, \vec{V}_f, m_f$ à l'instant t_f fixé ($\vec{r}_f, \vec{V}_f$ pouvant être partiellement indéterminés) avec la consommation $|\Delta m| = |m_f - m_0|$ minimale.

Les "équations du mouvement" sont très simples :

$$(11) \quad \dot{\vec{r}} = \vec{V}$$

$$(12) \quad \dot{\vec{V}} = \vec{\gamma} + \vec{g}(\vec{r}, t) = \frac{F}{m} \vec{D} + \vec{g}(\vec{r}, t) \quad \left. \vphantom{\dot{\vec{V}} = \vec{\gamma} + \vec{g}(\vec{r}, t)} \right\} \text{(équations du mouvement proprement dites)}$$

$$(13) \quad \dot{m} = -q \quad \text{(équation de consommation)}$$

L'Hamiltonien s'écrit alors :

$$(14) \quad H = \vec{p}_r \cdot \dot{\vec{r}} + \vec{p}_V \cdot \dot{\vec{V}} + p_m \dot{m} = \vec{p}_r \cdot \vec{V} + \vec{p}_V \cdot \left(\frac{F}{m} \vec{D} + \vec{g} \right) - p_m q$$

où $\vec{p}_r, \vec{p}_V, p_m$ sont adjoints aux éléments $\vec{r}, \vec{V}, m$ de l'état.

L'indice de performance à maximiser est la masse finale :

$$(15) \quad S = m_f.$$

Il faut donc maximiser à chaque instant l'Hamiltonien par rapport à la commande $\vec{D}$, F , q .

La direction optimale $\vec{D}^*$ de la poussée est évidemment celle du vecteur efficacité $\vec{p}_V$:

$$(15) \quad \vec{D}^* = \vec{p}_V / |\vec{p}_V|.$$

L'Hamiltonien devient alors :

$$(17) \quad H = -p_m q + \frac{|\vec{p}_V|}{m} F + (\text{termes indépendants de } q \text{ et } F).$$

Le système adjoint, dans lequel la direction optimale de la poussée a été portée, s'écrit :

$$(18) \quad \dot{\vec{p}}_r = -\vec{p}_V \cdot \left[\nabla^T \cdot \vec{g}^T \right] \quad \left(\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ opérateur ligne} \right)$$

$$(19) \quad \dot{\vec{p}}_V = -\vec{p}_r$$

$$(20) \quad \dot{p}_m = \frac{|\vec{p}_V| F}{m^2}.$$

On en déduit :

$$(21) \quad \frac{d}{dt} (m p_m) = \dot{m} p_m + m \dot{p}_m = \frac{F}{m} (|\vec{p}_V| - \frac{m p_m}{W}).$$

Nous envisageons successivement les cas des systèmes de propulsion (S) , (S_2) et (S_1) , complétant ainsi les résultats obtenus dans [22].

I,2.3.1. SYSTÈME DE PROPULSION (S) .

A un instant t quelconque, $H = C^{\text{te}}$ est l'équation d'une droite du plan q , F , de pente $m p_m / |\vec{p}_V|$ fixée et d'ordonnée à l'origine proportionnelle à H (le coefficient de proportionnalité $m / |\vec{p}_V|$ étant positif). Maximiser H revient donc à maximiser cette ordonnée à l'origine en choisissant convenablement le point de fonctionnement q , F . Le résultat dépend de la pente de la droite (fig. 3) :

1. Si $\frac{m p_m}{|\vec{p}_V|} > W_{\max}$, le point O doit être utilisé (poussée nulle, arc balistique).

De (21) on déduit que :

$$(22) \quad m p_m = C^{\text{te}} [27].$$

La pente $m p_m / |\vec{p}_V|$ ne varie donc que par $|\vec{p}_V|$.

2. Si $\frac{m p_m}{|\vec{p}_V|} = W_{\max}$, il y a indétermination.

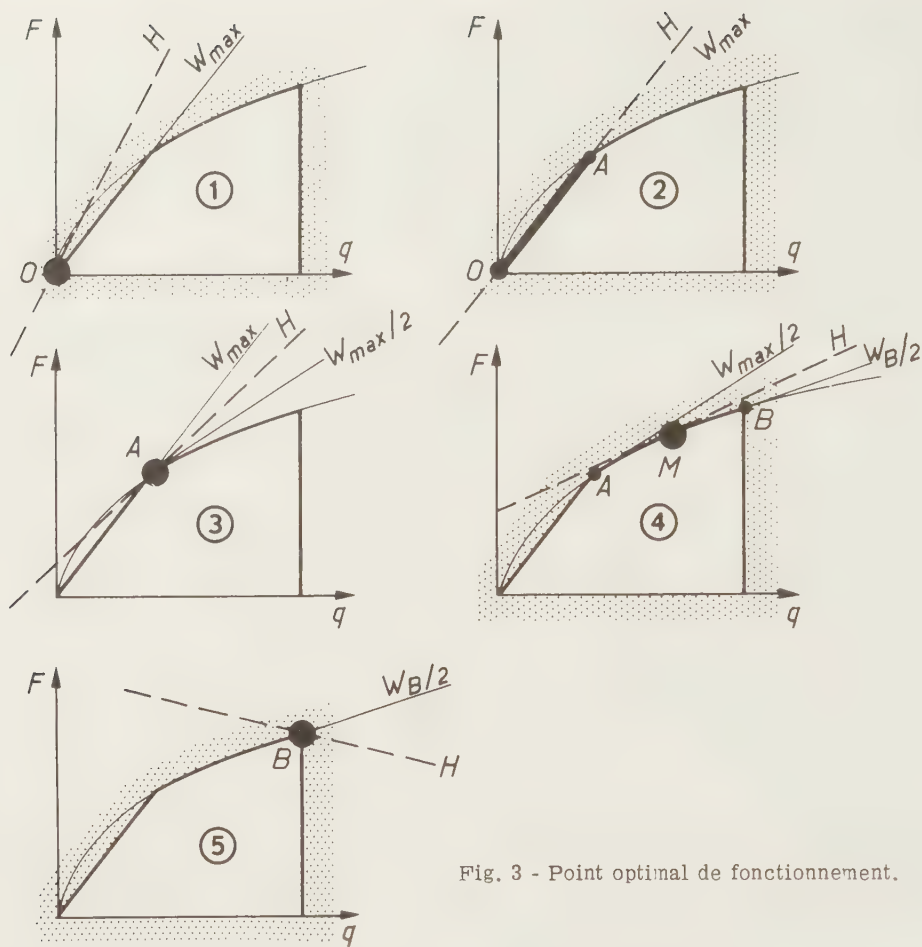


Fig. 3 - Point optimal de fonctionnement.

Cette indétermination n'est pas gênante si l'égalité n'a lieu qu'à l'instant t (commutation). Par contre, si l'égalité a lieu pendant un intervalle de temps fini t_1, t_2 ce n'est pas l'application du Principe du Maximum qui fournit la commande puisque tout point du segment OA convient a priori. La commande s'obtient directement en écrivant que la pente est constante sur t_1, t_2 et égale à W_{max} (solution singulière [31-33]) soit :

$$(23) \quad |\vec{p}_v| \equiv \frac{mp_m}{W_{max}}.$$

De (21) on déduit donc l'intégrale première :

$$(24) \quad mp_m = C^{te} [27]$$

d'où, par (23),

$$(25) \quad |\vec{p}_v| = C^{te} [27]$$

et, finalement, l'intégrale première :

$$(26) \quad \vec{p}_v \cdot \dot{\vec{p}}_v = -\vec{p}_v \cdot \vec{p}_r = 0.$$

Les vecteurs $\vec{p}_v$ et $\vec{p}_r$ sont donc orthogonaux.

Les arcs correspondants sont appelés : "arcs à poussée intermédiaire".

3. Si $\frac{W_{max}}{2} \leq \frac{mp_m}{|\vec{p}_V|} < W_{max}$ le point A doit être utilisé (poussée constante F_A).

Comme $\frac{d}{dt}(mp_m) > 0$, mp_m croît.

4. Si $\max\left(\frac{W_B}{2}, \frac{W_C}{2}\right) \leq \frac{mp_m}{|\vec{p}_V|} \leq \frac{W_{max}}{2}$, le point M de l'arc de parabole $\widehat{AB}$

(ou $\widehat{AC}$) doit être utilisé (poussée modulée $F = \frac{p_{max}}{mp_m} |\vec{p}_V|$). On en déduit alors l'intégrale première :

$$(27) \quad m^2 p_m = C^{te} [27]$$

donc $\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$ est proportionnel au vecteur efficacité $\vec{p}_V$.

5. Enfin, si $\frac{mp_m}{|\vec{p}_V|} < \max\left(\frac{W_B}{2}, \frac{W_C}{2}\right)$, le point B (ou C) doit être utilisé (poussée constante F_{max}).

Ainsi, une trajectoire optimale de transfert se compose-t-elle, sauf cas singulier, d'une succession (lorsque la pente $mp_m/|\vec{p}_V|$ varie) d'arcs balistiques ($F = 0$), d'arcs à poussée constante à la vitesse d'éjection maximale ($F = F_A$), d'arcs à poussée modulée [$F_A \leq F \leq \min(F_B, F_C)$] et d'arcs à poussée maximale [$F = \min(F_B, F_C)$].

I,2.3.2. CAS PARTICULIER DES SYSTÈMES DE PROPULSION (S_2).

Il est commode dans ce cas de définir la position du point M sur l'arc $\widehat{OB}_\infty$ (fig. 2 b) par la donnée de la poussée F ou mieux de l'accélération de poussée $\gamma = F/m$.

Ce choix est particulièrement intéressant; en effet, l'intégration de l'équation :

$$(28) \quad -\frac{\dot{m}}{m^2} = \frac{1}{2p_{max}} \gamma^2$$

entre les instants t_0 et t fournit :

$$(29) \quad \frac{1}{m} - \frac{1}{m_0} = \frac{J}{p_{max}}$$

où

$$(30) \quad J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \gamma^2 dt$$

est un indice de performance qui croît de façon monotone lorsque la masse m diminue.

Cet indice peut donc avantageusement remplacer la masse m pour exprimer la dépense de l'opération.

La nouvelle équation de consommation est :

$$(31) \quad J = \frac{\gamma^2}{2}.$$

Les équations du mouvement (11), (12) et (31) ne contiennent plus que la commande $\vec{\gamma}$.

La transformation canonique : $(m; p_m) \Rightarrow (J; p_J)$ est telle que [25, 30] :

$$(32) \quad p_m dm = p_J dJ \left(= -p_J \frac{p_{max}}{m^2} dm \right)$$

d'où :

$$(33) \quad p_m = -p_J \frac{p_{max}}{m^2}.$$

Or, J ne figurant pas dans les seconds membres des équations du mouvement $\dot{p}_J = 0$ et

$$(34) \quad p_J = C^{te} = p_{Jf} = c_J = -1$$

puisqu'il s'agit de maximiser $S = -J_f$.

On retrouve donc l'intégrale première (27) où la constante est, par le choix (34), égale à P_{max} et l'accélération optimale est simplement donnée par :

$$(35) \quad \boxed{\vec{\gamma} = \vec{p}_V}$$

L'accélération de poussée est égale au vecteur efficacité.

I,2.3.3. CAS PARTICULIER DES SYSTÈMES DE PROPULSION (S_1).

La vitesse d'éjection W étant constante, l'intégration de l'équation :

$$(36) \quad -W \frac{\dot{m}}{m} = \frac{F}{m} = \gamma$$

entre les instants t_0 et t fournit :

$$(37) \quad -W \text{Log} \frac{m}{m_0} = C$$

où

$$(38) \quad C = \int_{t_0}^t \gamma dt$$

est la "vitesse caractéristique" qui croît de façon monotone lorsque la masse m diminue et qui peut donc avantageusement remplacer la masse m pour exprimer le coût de l'opération.

La transformation canonique $(m; p_m) \Rightarrow (C; p_c)$ est telle que :

$$(39) \quad p_m dm = p_c dC \left(= -p_c W \frac{dm}{m} \right)$$

d'où

$$(40) \quad p_m = -\frac{W}{m} p_c.$$

La loi de poussée est alors donnée par :

$$(41) \quad F = F_{max} U(\Theta)$$

où :

$$U(\Theta) = \frac{1 + \text{signe } \Theta}{2}$$

est l'échelon unité et :

$$(42) \quad \Theta = |\vec{p}_V| + p_c$$

est la fonction de commutation.

La loi de poussée est un "tout-ou-rien" ($F = \begin{cases} F_{max} \\ 0 \end{cases}$ selon que $\Theta \geq 0$)

Sur les arcs balistiques, $mp_m = C^{te}$ [équation (22)] donc $p_c = C^{te}$. Sur les arcs propulsés

$\frac{d}{dt}(mp_m) > 0$, donc mp_m croît et p_c décroît.

VITESSE D'ÉJECTION OPTIMALE.

La réalisation optimale d'une mission donnée à l'aide d'un système de propulsion (S_2) conduit à utiliser des poussées telles que le point représentatif M_2 du diagramme de commande décrive par exemple l'arc $\widehat{QR}$ (fig. 4).

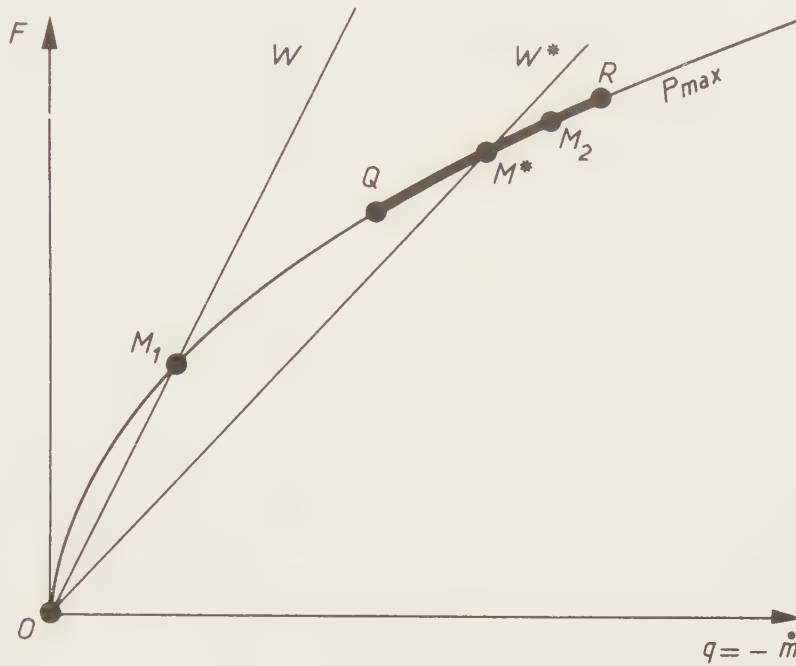


Fig. 4 - Vitesse d'éjection optimale.

La réalisation de la même mission avec un système de propulsion (S_1) de même puissance installée P_{max} et de vitesse d'éjection constante W conduit à utiliser les points O ou M_1 .

Cette vitesse d'éjection W constante reste (en général) au choix de l'utilisateur (choix de l'éjecteur à adapter au système de conversion de l'énergie).

Le problème est de choisir la vitesse W de façon optimale (W^*) c'est-à-dire telle que la consommation de propulsif soit minimale pour la mission donnée [35]. Le système de propulsion (S_1) optimal correspondant sera noté (S_1^*).

Il est démontré en Annexe 1 que la vitesse d'éjection optimale W^* est fournie par l'équation :

$$(43) \quad \int_{t_0}^{t_f} \frac{U(\Theta)}{m} (\Theta + p_c) dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{U(\Theta)}{m} (|\vec{p}_v| + 2p_c) dt = 0.$$

La condition (43) s'interprète simplement (fig. 5) :

Seule la partie de l'efficacité $|\vec{p}_v|/m$ dessus du niveau de commutation $-p_c/m$ intervient, ce qui est logique. Pour la vitesse d'éjection optimale W^* , l'aire (1) représentant en quelque sorte le dépassement global de l'efficacité au-dessus du niveau de commutation est égale à l'aire (2) au-dessous du niveau de commutation.

Des exemples de la détermination de la vitesse d'éjection optimale W^* seront donnés aux § II,1.3.1.3. et II,2.3.2.3.

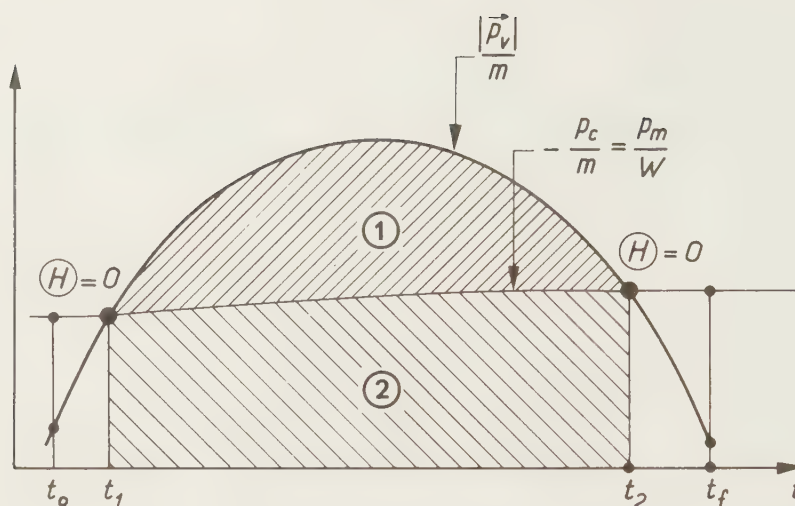


Fig. 5 - Longueur optimale des arcs de poussée maximale.

I,2.3.4. INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE DU VECTEUR EFFICACITÉ.

Nous avons vu le rôle fondamental joué par le vecteur efficacité $\vec{p}_v$ dans la détermination de la loi de poussée optimale, quel que soit le système de propulsion envisagé.

Nous nous proposons de trouver une interprétation cinématique de ce vecteur. Pour cela, cherchons le lieu de l'extrémité $\mathcal{P}$ du vecteur $\vec{M}\mathcal{P} = \vec{p}_v$ dans les axes fixes où est repéré le mouvement du mobile (fig. 6). Posons $\vec{O}\mathcal{P} = \vec{\rho}$. Il vient :

$$(44) \quad \ddot{\vec{\rho}} = \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{p}}_v$$

or, d'après les équations (18) et (19) du système adjoint :

$$(45) \quad \ddot{\vec{p}}_v = -\dot{\vec{p}}_r = \vec{p}_v \cdot \left[\nabla^T \cdot \vec{g}^T(\vec{r}, t) \right] \quad \left(\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{opérateur ligne} \right)$$

donc :

$$(46) \quad \ddot{\vec{\rho}} = \vec{g} + \vec{g}(\vec{r}, t) + \left[\nabla^T \cdot \vec{g}^T(\vec{r}, t) \right] (\vec{\rho} - \vec{r})$$

soit, finalement

$$(47) \quad \ddot{\vec{\rho}} = \vec{g} + \vec{g}(\vec{\rho}, t) + o(|\vec{p}_v|).$$

Donc, à un ordre en $|\vec{p}_v|$ supérieur au premier près, le point $\mathcal{P}$ se déplace comme s'il était soumis à chaque instant au même champ de pesanteur et à la même accélération de poussée que le mobile $\mathcal{M}$ (la pesanteur étant évidemment calculée en $\mathcal{P}$ et non en $\mathcal{M}$).

L'adjoint n'étant défini qu'à un facteur multiplicatif près, fixé par la condition de normalisation, il est toujours possible de fixer cette condition de normalisation de façon que $|\vec{p}_v|$ soit $\ll |\vec{r}|$ et que la propriété énoncée soit vérifiée avec précision.

Nous avons, par commodité, précédemment choisi les conditions de normalisation :

$$p_{mf} \text{ (ou } p_{cf}, \text{ ou } p_{jf}) = c_m \text{ (ou } c_c \text{ ou } c_j) = -1.$$

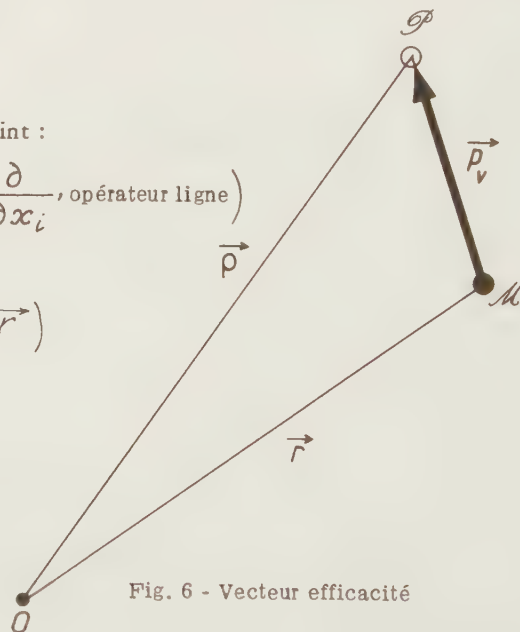


Fig. 6 - Vecteur efficacité

Il suffit de prendre une valeur de module $\ll 1$.

La loi optimale d'accélération peut donc, *théoriquement*, être définie de la manière suivante (fig. 7) :

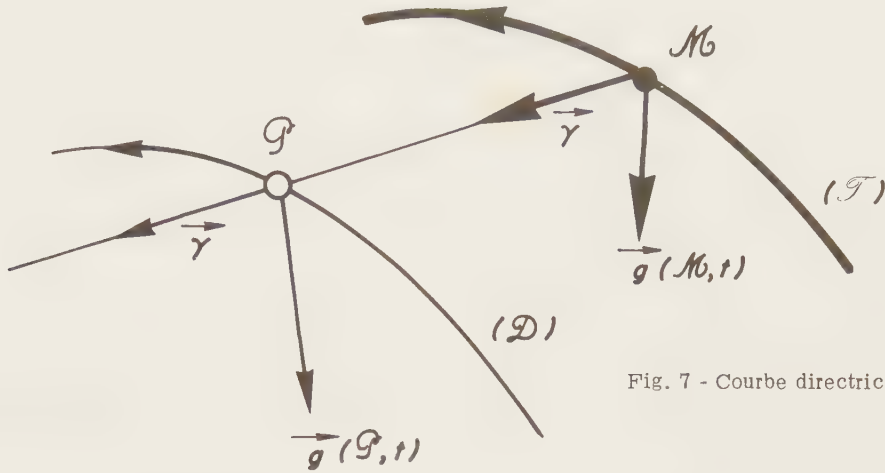


Fig. 7 - Courbe directrice.

un mobile pilote $\mathcal{P}$ muni d'un propulseur, est lancé à l'instant initial dans la position relative $\vec{p}_{V_0}$ par rapport à $\mathcal{M}_0$, proche de $\mathcal{M}_0$, et avec la vitesse relative faible $\dot{\vec{p}}_{V_0} = -\vec{p}_{r_0}$. Les mobiles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{P}$ sont ensuite soumis à la même accélération $\vec{\gamma}$ dirigée suivant $\mathcal{M}\mathcal{P}$ [et proportionnelle à $\mathcal{M}\mathcal{P}$ pour un système de propulsion (S_2)]. Alors que le mobile $\mathcal{M}$ décrit la trajectoire $(\mathcal{T})$, le mobile pilote $\mathcal{P}$ décrit la "courbe directrice" $(\mathcal{D})$ et fournit la direction optimale de poussée.

À cette solution, élégante en théorie, on préférera évidemment la solution plus classique où la loi optimale d'accélération est gardée en mémoire dans le système de guidage-pilotage du mobile $\mathcal{M}$, puisque, de toute façon, la donnée des conditions initiales $\vec{p}_{r_0}$ et $\vec{p}_{V_0}$ (six paramètres) suppose que ces quantités ont été calculées préalablement, en fonction de la mission à réaliser, c'est-à-dire que le problème d'optimisation a été résolu. Le mobile pilote n'a donc qu'une utilité toute théorique !

I,2.3.5. CAS D'UN CHAMP DE GRAVITATION INDÉPENDANT DU TEMPS.

Dans le cas d'un champ de gravitation indépendant du temps, les seconds membres des équations du mouvement (11) - (13) ne contenant pas explicitement la variable t , il est possible d'écrire l'intégrale première de l'Hamiltonien (voir § I,1.5.) :

$$(48) \quad H^* = \vec{p}_r \cdot \vec{V} + \vec{p}_V \cdot \vec{g}(\vec{r}) + \frac{|\vec{p}_V| F^*}{m} - p_m q^* = C^{te}$$

qui devient, pour une solution singulière $\left(|\vec{p}_V| \equiv \frac{m p_m}{W_{max}} \right)$

$$(49) \quad H^* = \vec{p}_r \cdot \vec{V} + \vec{p}_V \cdot \vec{g}(\vec{r}) = C^{te}.$$

D'autre part, nous avons vu qu'il est alors possible de définir des "orbites" généralisées et de considérer des transferts sans rendez-vous. Dire que la position finale $\mathcal{M}_f$ sur l' "orbite" finale n'est pas imposée revient à dire, en particulier, qu'il est équivalent d'obtenir à l'instant t_f les éléments $\vec{r}_f$, $\vec{V}_f$ ou les éléments $\vec{r}_f + \vec{V}_f \delta t$ et $\vec{V}_f + \vec{g}_f \delta t$ relatifs à un point voisin de l' "orbite" finale.

Comme $\vec{p}_{r_f}$ et $\vec{p}_{v_f}$ sont les coefficients d'influence des variations $\delta \vec{r}_f$ et $\delta \vec{v}_f$, compatibles avec les contraintes finales (trajectoire finale imposée), sur l'indice de performance S , cette équivalence se traduit par :

$$(50) \quad \left[\vec{p}_r \cdot (\vec{V} \delta t) + \vec{p}_v \cdot (\vec{g} \delta t) \right]_f = 0$$

c'est-à-dire encore :

$$(51) \quad \left[-\dot{\vec{p}}_v \cdot \vec{V} + \vec{p}_v \cdot \vec{g} \right]_f = 0.$$

Or, le champ $\vec{g}(\vec{r})$ dérivant du potentiel $-U(\vec{r})$, à une "orbite" est attachée en particulier son énergie :

$$(52) \quad E = \frac{V^2}{2} - U(\vec{r}) = C^{te} = \frac{V_o^2}{2} - U(\vec{r}_o).$$

La relation (51) traduit que les énergies des "orbites" généralisées osculatrices à l'instant t_f respectivement à la trajectoire du point $\mathcal{P}$ [courbe directrice ($\mathcal{D}$)] et à celle de $\mathcal{M}$ [trajectoire ($\mathcal{T}$)], sont égales. En effet :

$$(53) \quad E_{\mathcal{P}} - E_{\mathcal{M}} = DE = D \left(\frac{V^2}{2} - U \right) = \vec{V} \cdot D\vec{V} - \overrightarrow{\text{grad } U} \cdot D\vec{r} =$$

$$\vec{V} \cdot (\dot{\vec{p}} - \dot{\vec{r}}) - \overrightarrow{\text{grad } U} \cdot (\vec{p} - \vec{r}) = \vec{V} \cdot \dot{\vec{p}}_v - \vec{g} \cdot \vec{p}_v$$

est bien nul à l'instant t_f , à cause de (51).

I,2.4. CAS DU CHAMP CENTRAL.

L'hypothèse du champ central simplifie beaucoup le problème des transferts optimaux, par le fait que le mouvement naturel est intégrable. Afin de bénéficier au maximum de cette intégration, les éléments de l'orbite képlérienne osculatrice à la trajectoire sont pris comme composantes de l'état. Il s'agit évidemment de choisir les éléments les plus appropriés au problème et, en particulier, ce choix ne doit pas être modifié dans le cas des faibles excentricités. La variable de position doit être particulièrement bien choisie, car elle doit être substituée au temps, comme variable de description, afin de faciliter les intégrations. La loi de poussée optimale s'interprète aisément : la poussée est dirigée vers un mobile pilote décrivant lui-même une orbite képlérienne dont les éléments sont perturbés.

I,2.4.1. ÉLÉMENTS ORBITAUX OSCULATEURS.

Le champ de gravitation $\vec{g}$ étant central, de centre O ($\vec{g} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$), les éléments $\vec{r}$, $\vec{V}$ (fig. 1) définissent à chaque instant t l'orbite képlérienne ($\mathcal{O}$) "osculatrice" (au sens de la Mécanique Céleste) à la trajectoire de transfert ($\mathcal{T}$) du mobile $\mathcal{M}$, c'est-à-dire, l'orbite que continuerait à décrire $\mathcal{M}$ si, à partir de cet instant, la poussée était supprimée.

Un transfert (avec rendez-vous) est donc le passage du mobile $\mathcal{M}$, entre les instants t_o et t_f fixés, d'une position $\mathcal{M}_o$ bien déterminée sur l'orbite initiale ($\mathcal{O}_o$) jusqu'à une position $\mathcal{M}_f$ bien déterminée sur l'orbite finale ($\mathcal{O}_f$) avec la vitesse $\vec{V}_f$ correcte (fig. 8). Dans un transfert sans rendez-vous, la position $\mathcal{M}_f$ sur ($\mathcal{O}_f$) n'est pas imposée. Le problème d'interception [rendez-vous de position avec un mobile cible $\mathcal{M}_c$ décrivant l'orbite ($\mathcal{O}_f$) sans que la vitesse correcte soit imposée] ne sera pas étudié.

3, du "vecteur périégée" :

$$(55) \quad \vec{e} = \frac{1}{\mu} \vec{V} \wedge \vec{h} - \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{intégrale première de LAPLACE, voir Annexe 2})$$

dirigé vers le périégée et de longueur e (excentricité), ou mieux de la projection $\vec{e}_{plan}$ de $\vec{e}$ sur le plan de référence Oxy , ayant pour composantes :

$$(56) \quad \vec{e}_{plan} \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \quad (\text{deux paramètres})$$

Remarque : Le choix précédent est préférable à celui qui consisterait à définir l'orbite osculatrice (6) par la donnée de $\vec{h}$ (moment cinétique : trois paramètres) et $\vec{e}$ (vecteur périégée : trois paramètres), liés par $\vec{h} \cdot \vec{e} = 0$ (une relation), car le demi-grand axe a , lié à la période T par les relations

$$(57) \quad n^2 a^3 = \mu, \quad n = \frac{2\pi}{T} = \text{moyen mouvement},$$

joue un rôle fondamental dans les rendez-vous alors que la grandeur h du moment cinétique, liée au "paramètre" $p = a(1-e^2)$ de l'orbite par $h^2 = \mu p$ est d'un intérêt moindre.

D'autre part, la position du mobile $\mathcal{M}$ sur l'orbite osculatrice (6) peut être définie par la donnée de son ascension droite (géocentrique) ou de sa longitude écliptique (héliocentrique) :

$$(58) \quad L = (\vec{Ox}, \vec{Om}).$$

Il est préférable de prendre L comme paramètre au lieu de θ (argument), v (anomalie vraie), u (anomalie excentrique), $M = u - e \sin u$ (anomalie moyenne) ou même, au lieu des longitudes (au sens de la Mécanique Céleste) : $\Omega + \theta$ ou $\Omega + \omega + M$, car L varie de façon monotone avec le temps (du moins si i ne devient pas égal à 90° , ce qui ne sera jamais le cas pour des transferts proches) alors que cela peut ne pas être exact pour les autres quantités.

En particulier, lors de l'application impulsienne de la poussée, la position du mobile $\mathcal{M}$ (donc sa longitude L) ne varie pas, alors que les autres quantités peuvent subir des variations de signe quelconque.

L'utilisation des éléments orbitaux est en général pratique pour traiter les problèmes de transfert.

En effet, alors que les éléments $\vec{r}$, $\vec{V}$ varient dans de grandes proportions tout au long de la trajectoire de transfert ($\mathcal{T}$), même sur les arcs balistiques, les cinq premiers éléments orbitaux sont constants sur les arcs balistiques et varient, en général, plus continuellement sur les arcs propulsés, surtout s'il s'agit d'un transfert entre orbites proches.

D'autre part, les conditions finales s'expriment en général plus simplement, car dans la majorité des cas, elles intéressent directement les éléments orbitaux, plutôt que les éléments $\vec{r}$, $\vec{V}$ [demi-grand axe (ou énergie) fixé, orientation du plan de l'orbite fixée, etc ...]. En particulier, la condition de non-rendez-vous, c'est-à-dire position finale $\mathcal{M}_f$ sur l'orbite finale ($\mathcal{O}_f$) indifférente, se traduit très simplement (ascension droite finale L_f indifférente).

Enfin, le choix des éléments orbitaux associé à l'hypothèse de linéarisation, conduit, pour les transferts entre orbites proches, à un adjoint constant.

I,2.4.2. VARIATION DES ÉLÉMENTS ORBITAUX.

La variation des éléments orbitaux est donnée par les formules des perturbations :

$$(59) \quad \dot{\vec{Z}}_{plan} = \frac{1}{h} (\vec{r} \wedge \vec{\delta})_{plan}$$

$$(60) \quad \dot{\vec{a}} = \frac{2a^2}{\mu} (\vec{V} \cdot \vec{\gamma})_{plan}$$

$$(61) \quad \dot{\vec{e}}_{plan} = \frac{1}{\mu} \left[\vec{\gamma} \wedge \vec{h} + \vec{V} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{\gamma}) \right]_{plan} \quad (\text{Voir Annexe 2})$$

et l'équation

$$(62) \quad \dot{L} = \frac{h \cos i}{r^2 (1 - \sin^2 i \sin^2 \theta)}.$$

Dans ces équations $\vec{r}$, $\vec{V}$, i , $\vec{h}$, θ sont supposés exprimés en fonction de $\vec{Z}_{plan}$, a , $\vec{e}_{plan}$ et L .

I,2.4.3. VARIATION DES ÉLÉMENTS DE L'ORBITE DIRECTRICE.

Lorsque l'accélération de poussée $\vec{\gamma}$ est nulle, le mobile pilote $\mathcal{P}$, soumis uniquement au champ newtonien central $\vec{g}(\vec{r}) = -\mu \vec{r}/r^3$, décrit une orbite directrice képlérienne ($\mathcal{D}$). Lorsque l'accélération de poussée $\vec{\gamma}$ n'est pas nulle, le mobile pilote est soumis également à l'accélération $\vec{\gamma}$ et il est possible de définir à chaque instant l'orbite directrice képlérienne ($\mathcal{O}_P$) osculatrice à la trajectoire ($\mathcal{D}$) de $\mathcal{P}$, de même qu'il a été possible de définir l'orbite képlérienne ($\mathcal{O}$) osculatrice à la trajectoire ($\mathcal{T}$) de $\mathcal{M}$. Nous nous proposons de calculer les cinq premiers éléments de cette orbite osculatrice et leurs variations en fonction de $\vec{\gamma}$.

Si D désigne la différence entre un élément de ($\mathcal{O}_P$) et l'élément correspondant de ($\mathcal{O}$) :

$$(63) \quad \overrightarrow{Dh} = \vec{h}_P - \vec{h} = D(\vec{r} \wedge \vec{V}) = D\vec{r} \wedge \vec{V} + \vec{r} \wedge D\vec{V} =$$

$$\vec{p}_V \wedge \vec{V} + \vec{r} \wedge \dot{\vec{p}}_V = \vec{p}_V \wedge \vec{V} + \vec{p}_r \wedge \vec{r}$$

$$(64) \quad \overrightarrow{De} = \vec{e}_P - \vec{e} = D\left(\frac{1}{\mu} \vec{V} \wedge \vec{h} - \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{\mu} D\vec{V} \wedge \vec{h} + \frac{1}{\mu} \vec{V} \wedge D\vec{h} - D\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) =$$

$$\frac{1}{\mu} \vec{h} \wedge \vec{p}_r + \frac{1}{\mu} \vec{V} \wedge D\vec{h} - \frac{\vec{p}_V}{r} + \frac{\vec{r}}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{p}_V)$$

$$(65) \quad DE = E_P - E = D\left(\frac{\vec{V}^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right) = \vec{V} \cdot D\vec{V} + \mu \frac{\vec{r} \cdot D\vec{r}}{r^3} = -\vec{V} \cdot \vec{p}_r + \mu \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}_V}{r^3}.$$

Si l'accélération de poussée optimale $\vec{\gamma}^* = \gamma^* \vec{p}_V / |\vec{p}_V|$ est appliquée, les variations de ces différences sont données par :

$$(66) \quad \frac{d\overrightarrow{Dh}}{dt} = D \frac{d\vec{h}}{dt} = D(\vec{r} \wedge \vec{\gamma}^*) = D\vec{r} \wedge \vec{\gamma}^* = \vec{p}_V \wedge \vec{\gamma}^* = 0$$

$$(67) \quad \frac{d\overrightarrow{De}}{dt} = D \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{1}{\mu} D \left[\vec{\gamma}^* \wedge \vec{h} + \vec{V} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{\gamma}^*) \right] = \frac{1}{\mu} \left[\vec{\gamma}^* \wedge D\vec{h} - \vec{p}_r \wedge (\vec{r} \wedge \vec{\gamma}^*) \right]$$

$$(68) \quad \frac{dDE}{dt} = D \frac{dE}{dt} = D (\vec{V} \cdot \vec{\gamma}^*) = \dot{\vec{p}}_V \cdot \vec{\gamma}^* = \gamma^* \frac{d|\vec{p}_V|}{dt}.$$

On vérifie bien que si $\vec{\gamma} = 0$, $\vec{Dh}$, $\vec{De}$ et DE sont constants. Mais, de plus, on voit que $\vec{Dh}$ est constant, même lorsque l'accélération de poussée est appliquée, ce qui fournit une intégrale première pour le problème d'optimisation :

$$(69) \quad \vec{Dh} = \vec{p}_V \wedge \vec{V} + \vec{p}_r \wedge \vec{r} = \text{vecteur constant lorsque } \vec{\gamma}^* \text{ optimal est appliqué dans un champ central.}$$

Cette intégrale première est signalée, entre autres, dans [27]. Ici elle est reliée à la notion d'orbite directrice osculatrice.

L'interprétation de $\vec{Dh}$ est aisée :

supposons qu'à l'instant t quelconque, on fasse subir aux éléments $\vec{r}$, $\vec{V}$ une rotation d'ensemble $\delta\vec{R}$. Si cette rotation est compatible avec les contraintes finales, la variation de l'indice de performance S est alors :

$$\begin{aligned} \vec{p}_r \cdot \delta\vec{r} + \vec{p}_V \cdot \delta\vec{V} &= \vec{p}_r \cdot (\delta\vec{R} \wedge \vec{r}) + \vec{p}_V \cdot (\delta\vec{R} \wedge \vec{V}) = \\ &= \delta\vec{R} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{p}_r + \vec{V} \wedge \vec{p}_V) = -\delta\vec{R} \cdot \vec{Dh} \end{aligned}$$

$-\vec{Dh}$ apparaît donc comme le coefficient d'influence $\vec{p}_R$, sur l'indice de performance S , d'une rotation d'ensemble $\delta\vec{R}$ compatible avec les contraintes finales. En particulier, si l'état cinématique final $\vec{r}_f$, $\vec{V}_f$ est défini à une rotation d'ensemble $\delta\theta$ près, autour de l'axe $\vec{k}$, $\vec{p}_R \cdot \delta\vec{R}$ doit être nul pour toute rotation $\delta\vec{R} = \vec{k} \delta\theta$ autour de cet axe, donc $\vec{p}_R \cdot \vec{k} = 0$. De même, si l'état cinématique final est défini à une rotation d'ensemble près, $\vec{p}_R = 0$.

Enfin, l'équation (68) montre que sur un arc singulier où $|\vec{p}_V| \equiv C^{\text{te}}$

$$(70) \quad DE = -\vec{V} \cdot \vec{p}_r + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{p}_V = C^{\text{te}} = -H^*$$

qui n'est autre que l'intégrale première (49) de l'Hamiltonien.

Sur un arc singulier l'énergie de l'orbite directrice osculatrice ($\mathcal{O}_D$) et l'énergie de l'orbite osculatrice ($\mathcal{O}$) diffèrent d'une constante.

Ces quelques généralités concernant les transferts optimaux soulignent la complexité du problème. Même dans le cas d'un champ de gravitation central, l'intégration des équations du mouvement et des équations adjointes (une fois l'expression de la poussée optimale portée dans ces équations) avec des conditions aux limites aux deux extrémités, est, en général, impossible analytiquement. Il faut avoir recours à des intégrations numériques [34, 35].

L'étude analytique a pu, cependant, être poursuivie dans des cas particuliers : cas singulier [31 - 33], transferts de durée indifférente [4, 7 - 19] et enfin transferts entre orbites proches.

C'est ce dernier cas qui va être abordé à présent.

1.3. TRANSFERTS ENTRE ORBITES PROCHES

L'hypothèse des faibles écarts de l'orbite osculatrice au cours du transfert, par rapport à une orbite nominale de référence permet la linéarisation du problème.

La simplification majeure apportée par cette hypothèse est de rendre négligeable la variation de l'adjoint.

La résolution du problème d'optimisation se fait alors en trois étapes :

1. *L'adjoint étant donné a priori, (avec un certain nombre de composantes nulles, correspondant aux éléments orbitaux dont les valeurs finales sont indifférentes) on en déduit la poussée optimale.*
2. *Cette poussée optimale est portée dans les équations linéarisées du mouvement qui sont intégrées. On en déduit les variations des éléments orbitaux et la consommation en fonction de l'adjoint.*
3. *L'adjoint est déterminé a posteriori à partir des variations des éléments imposées par le transfert (inversion) et la consommation s'en déduit, ainsi que la loi de poussée optimale.*

I,3.1. LINÉARISATION DU PROBLÈME.

Notre but est d'écrire les équations linéarisées du mouvement (variation des éléments de l'orbite, consommation),

1. avec une variable de description angulaire de position $\bar{u}$ au lieu du temps t (qui devient composante d'état) pour permettre une intégration ultérieure plus aisée,
2. de telle sorte que les seconds membres de ces équations ne contiennent pas l'état, ce qui assure un adjoint constant,
3. de façon à pouvoir traiter des problèmes de *rendez-vous éloignés sur orbites proches* et non pas seulement des problèmes de rendez-vous proches, comme c'est le cas dans la plupart des études [53, 54].

Pour cela, le sixième élément t est remplacé par un paramètre τ dont la variation $\Delta\tau$ s'interprète aisément.

I,3.1.1. ORBITE NOMINALE.

Dans ce qui suit, nous supposons donc que, *au cours du transfert*, l'orbite osculatrice $(\bar{O})$ s'écarte peu d'une orbite nominale $(\bar{O})$ (écart maximal $(\delta\bar{O}) = (\bar{O}) - (\bar{O})$ de l'ordre de $\varepsilon \ll 1$).

L'orbite nominale devant jouer un rôle privilégié, afin de simplifier les calculs, nous choisirons les unités suivantes :

- (1) unité de longueur : $\bar{a}$ = demi-grand axe de $(\bar{O})$,
- (2) unité de temps : $\frac{\bar{T}}{2\pi} = [\text{période sur l'orbite } (\bar{O})] / 2\pi$.

L'unité de vitesse est alors la vitesse circulaire $V_{\text{circ}}(\bar{a})$ à la distance $\bar{a} = 1$ du centre d'attraction et l'unité d'accélération, l'accélération de gravitation $g(\bar{a})$ à la distance $\bar{a} = 1$ du centre d'attraction.

Notons que le mobile nominal $\bar{\mathcal{M}}$ d'ascension droite L décrit l'orbite nominale $(\bar{\mathcal{O}})$ d'un mouvement képlérien en fonction du temps nominal $\bar{t}$ tel que :

$$(6) \quad \bar{r}^2 dL = \bar{a} \bar{b} d\bar{M} = \bar{a} \bar{b} \bar{n} d\bar{t} = \bar{r} \bar{b} d\bar{u}.$$

La variable de description $\bar{u}$ fixe maintenant l'ascension droite L du mobile réel $\mathcal{M}$ sur l'orbite osculatrice $(\mathcal{O})$.

Dans le cas d'un rendez-vous il est indispensable de connaître de plus le temps t qui devient une variable d'état. Il est équivalent de connaître t ou :

$$(7) \quad \delta t(L) = t(L) - \bar{t}(L)$$

avec les conventions suivantes (fixant les origines des temps t et $\bar{t}$)

$$(8) \quad t(L_o) = t_o = 0$$

$$(9) \quad \delta t(L_f) = t(L_f) - \bar{t}(L_f) = 0 \quad \left[\text{fixe } \bar{t}(L_f) = t_f, \text{ donc } \bar{t}(L_o) \right].$$

Si l'orbite finale $(\mathcal{O}_f)$ est alors prise pour orbite nominale, $\delta t(L)$ n'est autre que le retard temporel (sur l'orbite finale) du mobile nominal $\bar{\mathcal{M}}$ de même ascension droite L que le mobile réel $\mathcal{M}$, par rapport au mobile cible $\mathcal{M}_c$ (fig. 2).

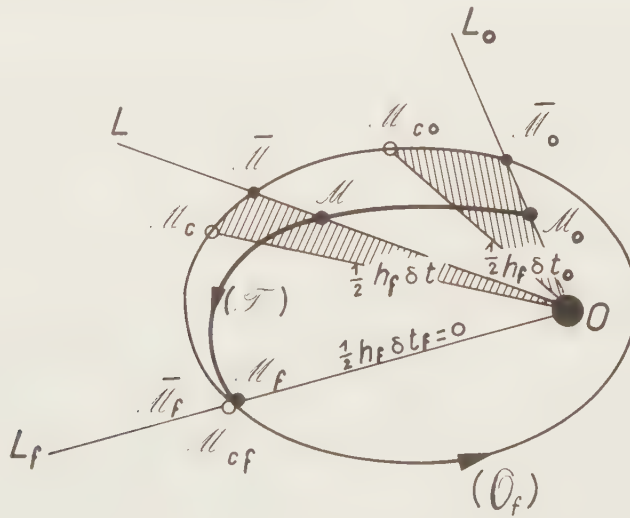


Fig. 2 - Interprétation géométrique de δt .

Ces trois mobiles $\bar{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_c$ sont confondus à l'instant final t_f .

Avec les nouvelles variables introduites, les équations du mouvement s'écrivent :

$$(10) \quad \vec{Z}'_{plan} = \frac{d\vec{Z}_{plan}}{d\bar{u}} = \frac{\bar{b}}{\bar{r}} \frac{r^2(1 - \sin^2 i \sin^2 \theta)}{h \cos i} \frac{(\vec{r} \wedge \vec{s})_{plan}}{h}$$

(*) Cette hypothèse, qui permet une interprétation aisée de δt_o et $\Delta \tau$, n'est cependant *aucunement obligatoire*. Il est même souvent préférable, pour accroître la précision des calculs, de choisir une orbite nominale intermédiaire entre l'orbite initiale et finale. La transposition est alors immédiate.

$$(11) \quad a' = \frac{da}{d\bar{u}} = \frac{\bar{b}}{\bar{r}} \frac{r^2 (1 - \sin^2 i \sin^2 \theta)}{h \cos i} 2 a^2 \vec{V} \cdot \vec{\gamma}$$

$$(12) \quad \vec{e}'_{plan} = \frac{d\vec{e}_{plan}}{d\bar{u}} = \frac{\bar{b}}{\bar{r}} \frac{r^2 (1 - \sin^2 i \sin^2 \theta)}{h \cos i} \left[\vec{\gamma} \wedge \vec{h} + \vec{V} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{\gamma}) \right]_{plan}$$

$$(13) \quad \delta t' = \frac{d(\delta t)}{d\bar{u}} = \frac{\bar{b}}{\bar{r}} \frac{r^2 (1 - \sin^2 i \sin^2 \theta)}{h \cos i} - \frac{\bar{r}}{\bar{a} \bar{n}}$$

$$(14) \quad C' = \frac{dC}{d\bar{u}} = \frac{\bar{b}}{\bar{r}} \frac{r^2 (1 - \sin^2 i \sin^2 \theta)}{h \cos i} \gamma \quad (S_1)$$

$$(15) \quad J' = \frac{dJ}{d\bar{u}} = \frac{\bar{b}}{\bar{r}} \frac{r^2 (1 - \sin^2 i \sin^2 \theta)}{h \cos i} \frac{\gamma^2}{2} \quad (S_2)$$

$$(\mu = 1).$$

Ce sont ces équations qu'il faut à présent linéariser.

I,3.1.3. TRANSFERT INFINITÉSIMAL.

Précisons un peu la notion de transfert infinitésimal.

Afin de pouvoir linéariser les équations du mouvement, il n'est pas suffisant de supposer que les orbites initiale ($\mathcal{O}_0$) et finale ($\mathcal{O}_f$) sont proches. Comme nous l'avons fait § I,3.1.1., il faut bien supposer de plus que, au cours du transfert, l'écart entre l'orbite osculatrice ($\mathcal{O}$) et ces deux orbites reste faible [ou encore que ($\mathcal{O}_0$), ($\mathcal{O}_f$) et ($\mathcal{O}$) sont proches de l'orbite nominale ($\bar{\mathcal{O}}$)].

Définir ϵ comme l'écart *maximal* entre l'orbite osculatrice ($\mathcal{O}$) et l'orbite nominale ($\bar{\mathcal{O}}$), sans le calculer plus explicitement, suffit pour tous les développements théoriques qui suivent. Par contre, pour apprécier numériquement la précision attendue de la solution linéarisée, avant d'avoir complètement résolu le problème, il est souhaitable d'avoir une valeur, au moins approchée, de ϵ .

Dans le cas où le transfert a lieu en plus d'une révolution, il est possible d'adopter la valeur approchée suivante, qui dépend du système de propulsion envisagé :

$$(16) \quad \epsilon = \begin{cases} \max \left(|\Delta \xi|, \frac{|\Delta \eta|}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}, |\Delta a|, \frac{\Delta \alpha}{1 - \bar{e}^2}, \frac{|\Delta \beta|}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}, \frac{|\delta t_0|}{\Delta t} \right) & (S_1) \\ \max \left(|\Delta \xi|, \frac{|\Delta \eta|}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}, \frac{|\Delta a|}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}, \frac{|\Delta \alpha|}{1 - \bar{e}^2}, \frac{|\Delta \beta|}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}, \frac{|\delta t_0|}{\sqrt{1 - \bar{e}^2} \Delta t} \right) & (S_2) \end{cases}$$

où $\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \sqrt{1-\bar{e}^2}$ a été introduit pour tenir compte du cas où l'orbite nominale est quasi-parabolique ($\bar{e} \simeq 1$).

Dans le cas où le transfert a lieu en moins d'une révolution, le calcul d'une valeur approchée de ε est plus compliqué.

Un transfert infinitésimal correspond à une valeur $\varepsilon \ll 1$. Les écarts maximaux δ , au cours du transfert, entre les valeurs réelles et les valeurs nominales des cinq premiers éléments orbitaux sont de l'ordre de ε au plus.

La vitesse caractéristique du transfert :

$$(17) \quad \Delta C \simeq \int_{t_0}^{t_f} \gamma dt$$

est, dans le cas d'une durée supérieure à une révolution, de l'ordre de $\bar{V}_A \varepsilon$ où $\bar{V}_A$ est la vitesse d'apogée nominale.

Le dernier terme entrant dans la définition de ε est essentiel comme le montre l'exemple suivant : pour rattraper un mobile cible qui se trouve sur la même orbite que le poursuiveur mais avec une avance temporelle δt_0 , l'écart maximal $|\delta a|$ au cours du rendez-vous est, pour un système (S_1), évidemment de l'ordre de

$$\frac{|\delta t_0|}{\Delta t} [= \varepsilon \text{ d'après (16)}],$$

puisque le rattrapage se fait par variation de la période de l'orbite, alors que la variation totale Δ des cinq premiers éléments (et en particulier $|\Delta a|$) est nulle.

Pour les systèmes de propulsion (S_1), il est nécessaire de supposer, de plus, que la masse m du mobile varie peu (variation relative $|\Delta m|/\bar{m}$ de l'ordre de ε); la masse nominale $\bar{m}$ est alors prise pour unité. Cette condition implique que la vitesse d'éjection W est suffisamment grande pour le transfert considéré. Plus exactement; dans le cas d'une durée supérieure à une révolution,

$$(18) \quad W \geq \frac{\Delta C}{O(\varepsilon)} = \bar{V}_A \quad (\text{vitesse nominale à l'apogée})$$

Pour les systèmes de propulsion (S_2), cette hypothèse n'est pas nécessaire car seule l'accélération de poussée γ intervient dans les équations. Nous la ferons cependant quelquefois pour relier simplement la variation de masse Δm à la variation d'indice de performance ΔJ :

$$(19) \quad \Delta J = P_{max} \left(\frac{1}{m_f} - \frac{1}{m_o} \right) \simeq P_{max} \frac{|\Delta m|}{\bar{m}^2} = P_{max} |\Delta m| \text{ si } \bar{m} = 1$$

I,3.1.4. LINÉARISATION.

Si, dans les seconds membres des équations du mouvement (10) - (15), l'orbite osculatrice ($\hat{O}$) est remplacée par l'orbite nominale ($\bar{O}$) et la masse m par la masse nominale $\bar{m} = 1$, l'erreur relative commise sur la solution du problème est d'ordre ε .

Si ε est suffisamment petit, cette erreur est acceptable en ce qui concerne les variations des éléments de l'orbite (ces variations étant, au plus, d'ordre ε , l'erreur absolue est d'ordre ε^2). Par contre elle est inacceptable dans les problèmes de rendez-vous pour déterminer le temps t (ou ce qui revient au même le retard $\delta t(L)$). En effet, l'équation (13) fournirait un retard constant. Dans l'équation (13), les éléments osculateurs doivent être portés avec une précision relative ε^2 .

Désignant par :

$$(20) \quad \delta x = x - \bar{x}$$

l'écart, à l'ascension droite $\mathcal{L}$, entre l'état réel et l'état nominal, les équations *linéarisées* du mouvement s'écrivent (en omettant, sauf lorsque cela est nécessaire pour la compréhension, d'écrire le signe nominal $(\bar{})$ dans les seconds membres) :

$$(21) \quad \vec{Z}'_{plan} = \delta \vec{Z}'_{plan} = \frac{r}{\sqrt{1-e^2}} (\vec{r} \wedge \vec{\gamma})_{plan}$$

$$(22) \quad a' = \delta a' = 2r \vec{V} \cdot \vec{\gamma}$$

$$(23) \quad \vec{e}'_{plan} = \delta \vec{e}'_{plan} = r \left[\vec{\gamma} \wedge \vec{h} + \vec{V} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{\gamma}) \right]_{plan}$$

$$(24) \quad \delta t' = \frac{3}{2} r \delta a - \frac{2r}{1-e^2} \left(\frac{3}{2} \vec{e} + \vec{r} \right) \cdot \delta \vec{e}$$

$$(25) \quad \boxed{C' = \delta C' = r \gamma \quad (S_1)}$$

$$(26) \quad \boxed{J' = \delta J' = r \frac{\gamma^2}{2} \quad (S_2)}$$

avec $r = 1 - e \cos u$, $h = \sqrt{1 - e^2}$.

Remarquant que :

$$(27) \quad r \delta a = (1 - e \cos u) \delta a = \frac{d}{du} \left[(u - e \sin u) \delta a \right] - (u - e \sin u) \frac{d \delta a}{du}$$

et

$$(28) \quad -\frac{2r}{1-e^2} \left(\frac{3}{2} \vec{e} + \vec{r} \right) \cdot \delta \vec{e} = \frac{d}{du} (\vec{\mathcal{R}} \cdot \delta \vec{e}) - \vec{\mathcal{R}} \cdot \frac{d \delta \vec{e}}{du}$$

où

$$(29) \quad \vec{\mathcal{R}} = -\frac{2}{1-e^2} \int \left(\frac{3}{2} \vec{e} + \vec{r} \right) r du = -\frac{2}{1-e^2} \left\{ \left[\left(1 - \frac{e^2}{2} \right) \sin u - \frac{e \sin 2u}{4} \right] \vec{x} \right. \\ \left. + \sqrt{1-e^2} \left[\frac{3e}{4} - \cos u + \frac{e \cos 2u}{4} \right] \vec{y} \right\} = \frac{r}{\sqrt{1-e^2}} \vec{y} + \frac{r^2}{1-e^2} \vec{V}$$

est un vecteur périodique en $\mathcal{U}$ de période 2π , l'équation (24) peut être remplacée par :

$$(30) \quad \boxed{\tau' = \frac{3}{2} M \delta a' + \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\delta e'}}$$

où

$$(31) \quad \tau = -\delta t + \frac{3}{2} M \delta a + \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\delta e}$$

est un nouveau paramètre qui peut remplacer le temps t ou encore le retard δt dans un problème de rendez-vous.

En effet, avec les conventions adoptées plus haut :

$$(32) \quad \tau_f = \delta t_f = 0$$

car $\delta a_f = 0$ et $\vec{\delta e}_f = 0$ puisque nous avons choisi de faire coïncider l'orbite nominale avec l'orbite finale, et

$$(33) \quad \tau_o = -\delta t_o + \frac{3}{2} M_o \delta a_o + \vec{\mathcal{R}}_o \cdot \vec{\delta e}_o$$

$$\Delta \tau = \tau_f - \tau_o = \delta t_o + \frac{3}{2} M_o \Delta a + \vec{\mathcal{R}}_o \cdot \vec{\Delta e}.$$

Fixer $\Delta \tau$ revient à fixer δt_o (si Δa et $\vec{\Delta e}$ sont fixés, ce qui est le cas dans un rendez-vous).

Nous utiliserons donc dorénavant :

$$(34) \quad \boxed{\Delta \tau = (\text{retard temporel initial sur l'orbite finale du mobile nominal } \vec{\mathcal{M}} \text{ de même longitude } L_o \text{ que le mobile réel } \mathcal{M}_o, \text{ par rapport au mobile cible } \mathcal{M}_{co}) + \frac{3}{2} M_o \Delta a + \vec{\mathcal{R}}_o \cdot \vec{\Delta e} .}$$

L'utilisation du paramètre τ au lieu du temps t est intéressante car l'interprétation physique de $\Delta \tau$ est simple et, surtout, le second membre de l'équation en τ' ne contient plus l'écart d'état $\vec{\delta x}$, ce qui simplifie le problème d'optimisation (adjoint constant).

Appelons $\vec{\mathcal{X}}$ l'état cinématique :

$$(35) \quad \vec{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \vec{z}_{plan} \\ \frac{a}{e_{plan}} \\ \tau \end{bmatrix}$$

et $\vec{\delta \mathcal{X}}$ l'écart entre l'état cinématique et l'état cinématique nominal. Les équations (21) - (23) et (30) peuvent s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$(36) \quad \vec{\delta \mathcal{X}}' = r \vec{\mathcal{K}} \vec{\gamma}$$

où $\vec{\mathcal{K}}$ est le tenseur d'influence de l'accélération de poussée $\vec{\gamma}$ sur l'état cinématique, tenseur qui ne dépend que de la position $\mathcal{U}$ (et, évidemment, de $\mathbf{e}$).

Si $\vec{\gamma}$ a pour composantes :

$$(37) \quad \vec{\gamma} = \begin{cases} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{cases}$$

dans les axes mobiles $\mathcal{MXYZ}$ et si $\vec{Z}$ plan et $\vec{e}_{plan}$ sont définis par leurs composantes dans les axes fixes $Oxyz$, la matrice rectangle (6×3) représentative du tenseur $\bar{K}$ est :

$$(38) \quad K = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & K_{\xi z} \\ \hline 0 & 0 & K_{\eta z} \\ \hline K_{\alpha x} & K_{\alpha y} & 0 \\ \hline K_{\alpha x} & K_{\alpha y} & 0 \\ \hline K_{\beta x} & K_{\beta y} & 0 \\ \hline K_{\tau x} & K_{\tau y} & 0 \\ \hline \end{array}$$

Les éléments de cette matrice sont donnés en Annexe 3.

On peut noter que les éléments des cinq premières lignes de la matrice rK sont des polynômes en $\sin u$ et $\cos u$ et que u ne figure que dans les éléments de la sixième ligne (terme en $u \sin u$ dans $rK_{\tau x}$ et terme en u dans $rK_{\tau y}$).

Définition - Nous appellerons *transferts entre quasi-cercles*, les transferts entre orbites dont l'excentricité e est du même ordre que la grandeur ε du transfert ou plus petite ($e \leq \text{ordre } \varepsilon$). Il est alors possible de choisir une orbite nominale circulaire ($\bar{e} = 0$), puisque cela n'entraîne sur la solution qu'une erreur relative d'ordre

$e \leq \text{ordre } \varepsilon$.

Nous appellerons *transferts entre ellipses de faible excentricité*, les transferts entre orbites dont l'excentricité e est petite devant l'unité, mais grande devant la grandeur ε du transfert ($\varepsilon \ll e \ll 1$). L'orbite nominale sera alors une ellipse de faible excentricité ($\varepsilon \ll \bar{e} \ll 1$).

I,3.1.5. TRANSFERTS ET RENDEZ-VOUS.

Le choix de variables précédent permet de traiter, outre les problèmes de rendez-vous où Δu et $\Delta \tau$ sont fixés, les problèmes de transfert (sans rendez-vous) pour lesquels l'angle de transfert ΔL est fixé (Δu fixé) et la durée Δt indifférente (d'où : $\Delta \tau$ indifférent).

Par contre, il est impossible de traiter directement les problèmes de transfert (sans rendez-vous) pour lesquels la durée Δt est fixée et l'angle de transfert ΔL indifférent (d'où : Δu indifférent). En effet, il n'est pas équivalent de fixer Δt ou de fixer $\Delta \tau$ car $\bar{E}(L_f) = t_f$ étant donné, $\delta t_o = -\bar{E}(L_o)$ dépend de la longueur de l'arc képlérien $\bar{M}_o \bar{M}_f$ sur $(\mathcal{O}_f)$, donc de L_f . De toute façon, le raisonnement précédent supposait que l'orbite finale était connue (à une rotation du plan près, car seuls δa et $\delta \bar{e}$ interviennent dans τ). Ceci peut ne pas être le cas dans certains transferts.

L'étude des transferts (sans rendez-vous) de durée Δt fixée, que nous laissons de côté, pourrait de toute façon, être conduite en considérant la solution comme cas optimal de rendez-vous lorsqu'on balaye, à Δt fixé, les valeurs du paramètre Δu et des éléments de l'orbite qui ne sont pas imposés.

Il y a lieu de penser que la solution relative à un tel problème, où à la valeur t_{1f} (fixée) correspond la position finale optimale u_{1f} , diffère peut (en général) de la solution du problème du même transfert à position finale u_{1f} fixée. En particulier, la valeur t_{2f} du temps final optimal obtenue dans ce dernier cas doit être peu différente de t_{1f} . Toutefois, dans le cas d'un grand nombre de révolutions, il est possible que les deux solutions présentent des écarts importants.

I,3.2. DÉTERMINATION DE LA POUSSÉE OPTIMALE EN FONCTION DE L'ADJOINT.

Le Principe du Maximum est appliqué directement au problème linéarisé, afin de traiter le cas particulier des transferts entre orbites proches indépendamment des résultats plus généraux déjà obtenus au Chapitre I,2. La liaison directe est cependant faite dans l'Annexe 4, en utilisant la notion de changement canonique de variables [25, 30].

La loi de poussée optimale s'interprète aisément grâce aux notions d' "orbite directrice" $(\mathcal{O}_p)$ et surtout de "courbe d'efficacité" $(\mathcal{P})$.

Pour les systèmes de propulsion (S_1) des résultats généraux sont obtenus concernant le nombre maximum d'arcs de poussée maximale par révolution et les cas singuliers (du problème linéarisé).

I,3.2.1. APPLICATION DIRECTE DU PRINCIPE DU MAXIMUM AU PROBLÈME LINÉARISÉ.

Si :

$$(39) \quad \vec{P} = [\vec{p}_Z, p_a, \vec{p}_e, p_\tau] = [p_\xi, p_\eta, p_a, p_\alpha, p_\beta, p_\tau]$$

désigne l'"adjoint cinématique" (associé à l'écart cinématique $\delta \vec{x}$), où $\vec{p}_Z$ et $\vec{p}_e$ sont deux vecteurs dans le plan Oxy (donc à deux composantes), l'Hamiltonien s'écrit :

$$(40) \quad \mathcal{H} = \vec{p} \cdot \delta \vec{x}' = r \vec{P} \vec{K} \vec{\gamma} + \begin{cases} p_c \delta c' (s_1) \\ p_J \delta J' (s_2) \end{cases} = \vec{p}_Z \cdot \delta \vec{z}' + p_a \delta a' + \vec{p}_{e_1} \cdot \delta \vec{e}' +$$

$$\begin{cases} p_c \delta c' (s_1) \\ p_J \delta J' (s_2) \end{cases} = r \left[\vec{p}_V \cdot \vec{\gamma} + \begin{cases} p_c \gamma (s_1) \\ p_J \frac{\gamma^2}{2} (s_2) \end{cases} \right]$$

où :

$$(41) \quad \begin{aligned} \vec{p}_V = \vec{P} \vec{K} &= 2 p_a \vec{V} + \vec{h} \wedge \vec{p}_{e_1} + \left(\vec{p}_{e_1} \wedge \vec{V} + \frac{\vec{p}_Z}{h} \right) \wedge \vec{r} \\ &= 2 p_a \vec{V} + \vec{h} \wedge \vec{p}_e + \left(\vec{p}_e \wedge \vec{V} + \frac{\vec{p}_Z}{h} \right) \wedge \vec{r} + p_\tau (3M \vec{V} - 2 \vec{r}) \end{aligned}$$

et

$$(42) \quad p_{a_1} = p_a + \frac{3M}{2} p_\tau$$

$$(43) \quad \vec{p}_{e_1} = \vec{p}_e + \vec{R} p_\tau$$

$\mathcal{H}$ est maximum par rapport à $\vec{\gamma}$ pour :

$$(44) \quad \left(\frac{\vec{\gamma}}{\gamma} \right) \vec{D} = \frac{\vec{p}_V}{|\vec{p}_V|}$$

et :

$$(45) \quad (S_1) : \gamma = \gamma_{max} \quad U(\Theta) \quad (U = \text{échelon unité}, \Theta = |\vec{p}_V|/p_c = \text{fonction de commutation})$$

$$(46) \quad (S_2) : \gamma = |\vec{p}_V| \quad (\text{c'est-à-dire finalement } \vec{\gamma} = \vec{p}_V)$$

Avec une erreur relative ϵ , le vecteur $\vec{p}_V$ défini en (41) n'est autre que le "vecteur efficacité" rencontré au Chapitre I,2., c'est-à-dire le vecteur adjoint à la vitesse $\vec{V}$. Ce point est d'ailleurs

évident si on effectue le changement canonique de variables

$$(\vec{r}, \vec{V}, t) \Rightarrow \begin{cases} (\vec{x}, u) \\ \text{ou} \\ (\vec{Z}_{plan}, a, \vec{e}_{plan}, \tau, u) \end{cases}$$

(Voir Annexe 4).

L'Hamiltonien $\mathcal{H}$ ne contenant aucun écart δ , l'adjoint $\vec{p}$ est constant.

I,3.2.2. ORBITE DIRECTRICE.

Comme nous l'avons déjà signalé dans le cas d'un champ de gravitation quelconque, l'extrémité $\mathcal{P}$ du vecteur $\mathcal{M}\mathcal{P} = \vec{p}_V$ décrit, dans les axes fixes $Oxyz$ et au premier ordre en $|\vec{p}_V|$, une courbe directrice ($\mathcal{D}$) obtenue en soumettant le mobile pilote $\mathcal{P}$ au même champ de gravitation et à la même accélération de poussée que le mobile $\mathcal{M}$.

Si, au lieu du mobile réel $\mathcal{M}$, c'est le mobile nominal $\bar{\mathcal{M}}$ (correspondant à la même ascension droite $\mathcal{L}$) qui est utilisé, une erreur relative d'ordre ε seulement est commise sur $\vec{p}_V$ comme nous venons de le voir.

Or, le mobile nominal $\bar{\mathcal{M}}$ décrit l'orbite nominale ($\bar{\mathcal{O}}$) d'un mouvement képlérien ($\vec{\gamma} = 0$) en fonction du temps t . Donc le mobile pilote nominal $\bar{\mathcal{P}}$ décrit également une orbite képlérienne [orbite directrice nominale ($\bar{\mathcal{O}}_{\mathcal{P}}$)] d'un mouvement képlérien ($\vec{\gamma} = 0$) en fonction du temps $\bar{t}$ (fig. 3).

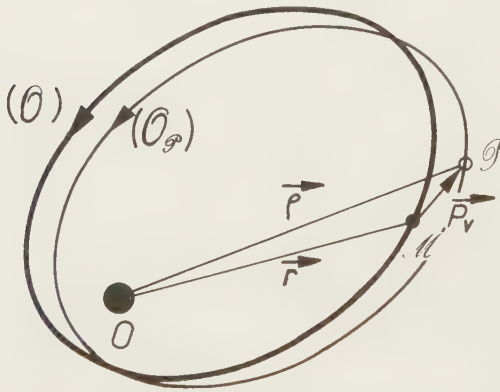


Fig. 3 - Orbite directrice.

La donnée de l'adjoint cinématique $\vec{P}$ (constant) est équivalente à la donnée de l'orbite directrice nominale ($\bar{\mathcal{O}}_{\mathcal{P}}$) (cinq éléments : $\vec{Z}_{plan \mathcal{P}}$, $a_{\mathcal{P}}$, $\vec{e}_{plan \mathcal{P}}$) et de la position initiale $\bar{\mathcal{P}}_0$ du mobile pilote nominal sur cette orbite (un élément), comme l'illustrent les équations suivantes, démontrées en Annexe 5 :

$$(47) \quad D\vec{h} = \vec{h}_{\mathcal{P}} - \vec{h} = \vec{p}_Z \wedge \vec{Z} + \vec{p}_e \wedge \vec{e} - p_\tau \vec{h} + \text{ordre } \vec{p}_V^2$$

$$(48) \quad \vec{D}\vec{e} = \vec{e}_{\mathcal{P}} - \vec{e} = \frac{\vec{p}_Z}{\sqrt{1-e^2}} \wedge \vec{e} + \sqrt{1-e^2} \vec{p}_e \wedge \vec{Z} + \text{ordre } \vec{p}_V^2$$

$$(\vec{p}_e \wedge \vec{Z} + \text{ordre } \vec{p}_V^2 \text{ pour } e = 0)$$

$$(49) \quad Da = a_{\mathcal{P}} - a = \frac{2}{h^2} (\vec{h} \cdot D\vec{h} + \vec{e} \cdot D\vec{e}) = -2p_\tau + \text{ordre } \vec{p}_V^2$$

(avec $h = \sqrt{1-e^2}$).

Il est important de remarquer que p_a n'intervient pas dans ces formules. Donc dans le cas où la variation du demi-grand axe est la seule variation imposée, c'est-à-dire où p_a est la seule composante non nécessairement nulle de l'adjoint, l'orbite directrice nominale coïncide avec l'orbite nominale (poussée tangentielle).

D'autre part $D\mathbf{a}$ ne contient que la composante $\mathbf{p}_\tau$ de l'adjoint. En effet, s'il n'y a pas rendez-vous ($\mathbf{p}_\tau = 0$), nous avons démontré au § 1.2.3.5., dans le cas d'un champ de gravitation quelconque (mais indépendant du temps), que les énergies des "orbites" osculatrices à l'instant final aux trajectoires des mobiles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{P}$ étaient égales. Ici, les énergies, donc les demi-grands axes et les périodes de l'orbite directrice nominale et de l'orbite nominale sont égales. Le vecteur efficacité $\vec{p}_{\mathcal{M}\mathcal{P}} \equiv \vec{M}\vec{P}$ est donc un vecteur périodique en $\mathcal{U}$ de période 2π s'il n'y a pas rendez-vous (ou plus généralement si $\mathbf{p}_\tau = 0$).

Par contre si $p_T \neq 0$ (ce qui ne peut se présenter que dans le cas du rendez-vous), les périodes de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{M}$ sont différentes et les points $\mathcal{M}$ et $\mathcal{P}$ s'écartent de plus en plus au cours des révolutions successives, le vecteur $\overrightarrow{p_V} \equiv \overrightarrow{\mathcal{M}\mathcal{P}}$ se couchant de plus en plus sur la vitesse $\overrightarrow{V}$ de $\mathcal{M}$.

I,3.2.3. COURBE D'EFFICACITÉ.

Le lieu (O_P) de P dans les axes fixes $Oxyz$ est simple (conique de foyer O) ce qui permet de suivre aisément l'évolution de la direction (dans l'espace absolu) de l'accélération optimale et même, dans le cas des systèmes de propulsion (S_2) , l'évolution de sa grandeur.

Cependant, il est commode de considérer également le lieu $(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ dans le système d'axes mobiles $\mathcal{MXYZ}$ d'origine $\mathcal{M}$ afin de suivre l'évolution de la direction de l'accélération optimale dans des axes liés cette fois au mobile (ce qui peut être intéressant du point de vue pratique) et de déterminer, dans le cas des systèmes de propulsion (S_1) , les arcs à poussée maximale et les arcs balistiques (fig. 4).

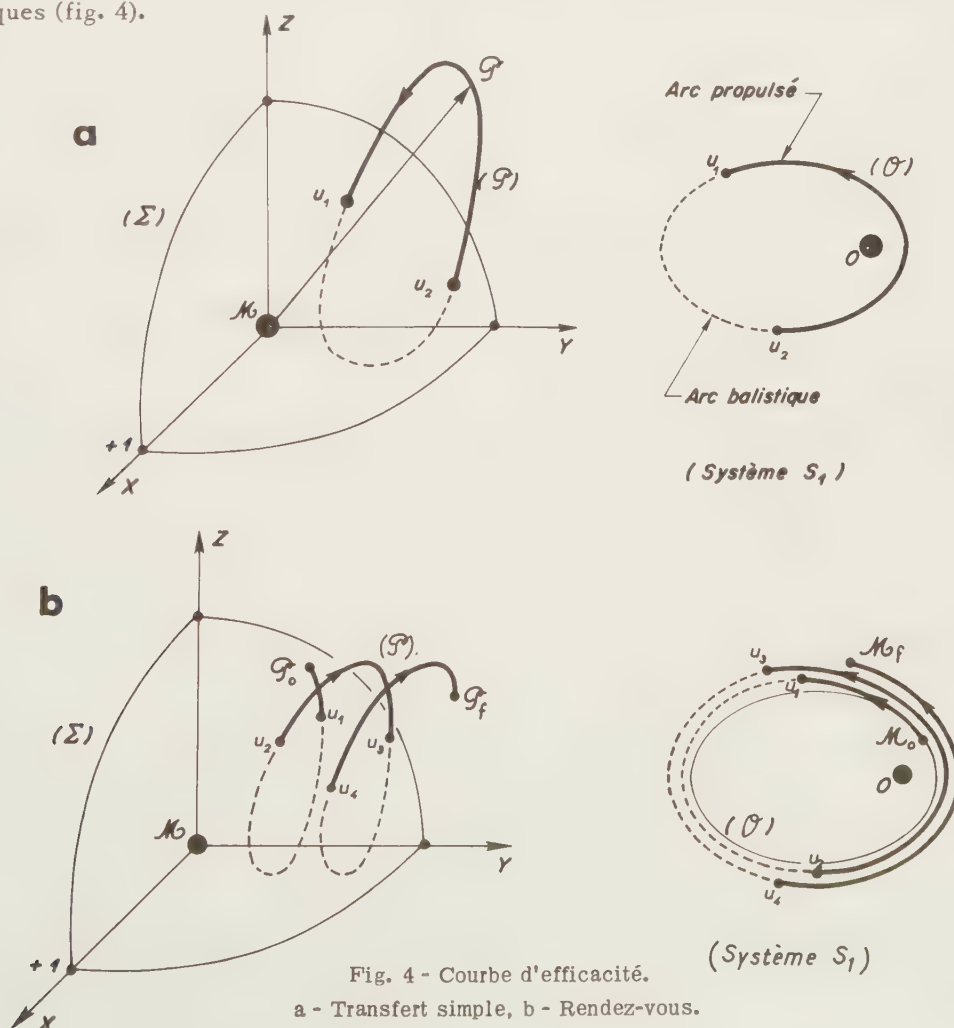


Fig. 4 - Courbe d'efficacité.
a - Transfert simple, b - Rendez-vous.

Rappelons en effet que, pour un système de propulsion (S_2), l'accélération optimale en $\mathcal{M}$ est le vecteur $\vec{\gamma} = \mathcal{M}\vec{\mathcal{P}} = \vec{p}_V$ (si $p_J = -1$).

Pour un système de propulsion (S_1), l'accélération a pour direction $\mathcal{M}\vec{\mathcal{P}} = \vec{p}_V$ et pour module $\gamma_{\max}$ si $|\vec{p}_V| > 1$, c'est-à-dire si $\mathcal{P}$ est à l'extérieur de la sphère (Σ) de centre $\mathcal{M}$ et de rayon 1, et zéro si $|\vec{p}_V| < 1$ c'est-à-dire si $\mathcal{P}$ est à l'intérieur de cette sphère (ce qui vient d'être dit suppose $p_c = -1$).

Les points de commutation $u_1, u_2 \dots$ (séparant les arcs de poussée maximale des arcs balistiques) sont donc les points d'intersection de la "courbe d'efficacité" ($\mathcal{P}$) et de la sphère (Σ).

Lorsque $p_T = 0$ (et, en particulier, lorsqu'il n'y a pas rendez-vous) les composantes $\vec{p}_e, \vec{p}_a$ et p_a, p_a sont fixes dans $\vec{p}_V$ et comme $\vec{r}$ et $\vec{V}$ sont périodiques en u , de période 2π , $\vec{p}_V$ est périodique de même période. La courbe d'efficacité ($\mathcal{P}$) est donc une courbe fermée et la même loi d'accélération doit être appliquée au cours des révolutions successives. La figure 4 a illustre ce cas pour un système de propulsion (S_1).

Par contre, lorsque $p_T \neq 0$ (ce qui ne peut se présenter que dans le cas du rendez-vous) les composantes $\vec{p}_e, \vec{p}_a$, varient en fonction de u , à cause des termes M et R , et $\vec{p}_V$ contient un terme séculaire (présence de M dans p_a). La courbe d'efficacité ($\mathcal{P}$) n'est plus une courbe fermée. La loi d'accélération doit être modifiée au cours des révolutions successives. La figure 4 b illustre ce cas pour un système de propulsion (S_1).

Pour $\Delta u \gg 2\pi$, ce n'est pas p_T mais $\Delta u/p_T$ qui est comparable aux autres composantes de l'adjoint et alors :

$$(50) \quad \vec{p}_V \sim (2p_a + 3u p_T) \vec{V} + h \wedge \vec{p}_e + \left(\vec{p}_e \wedge \vec{V} + \frac{\vec{p}_Z}{h} \right) \wedge \vec{r}.$$

I,3.2.4. COURBE D'EFFICACITÉ DANS LE CAS D'UNE ORBITE NOMINALE CIRCULAIRE (SANS RENDEZ-VOUS).

Dans le cas où l'orbite nominale (ϕ) est circulaire ($e=0$) (ce qui est le cas pour les transferts entre quasi-cercles), le vecteur efficacité $\vec{p}_V$ s'écrit (s'il n'y a pas rendez-vous, ou mieux, si $p_T = 0$) :

$$(51) \quad \vec{p}_V = 2p_a \vec{Y} + \vec{Z} \wedge \vec{p}_e + (\vec{p}_e \wedge \vec{Y} + \vec{p}_Z) \wedge \vec{X}.$$

Posant alors (fig. 5) :

$$(52) \quad \vec{p}_e = p_\alpha \vec{x} + p_\beta \vec{y} = p_e (\vec{x} \cos L_e + \vec{y} \sin L_e)$$

$$(53) \quad \vec{p}_Z = p_\xi \vec{x} + p_\eta \vec{y} = p_Z (\vec{x} \cos L_Z + \vec{y} \sin L_Z)$$

les composantes de $\vec{p}_V$ dans les axes mobiles sont :

$$(54) \quad \vec{p}_V \begin{cases} X = p_\alpha \sin L - p_\beta \cos L = p_e \sin(L - L_e) \\ Y = 2p_a + 2p_\alpha \cos L + 2p_\beta \sin L = 2p_a + 2p_e \cos(L - L_e) \\ Z = p_\xi \sin L - p_\eta \cos L = p_Z \sin(L - L_Z) \end{cases}$$

La courbe d'efficacité ($\mathcal{P}$) est une ellipse (fig. 6), section du cylindre elliptique (σ) de génératrices parallèles à $\mathcal{M}\vec{Z}$ et d'équation :

$$(55) \quad (\sigma) \quad 4X^2 + (Y - 2p_a)^2 - 4p_e^2 = 0$$

et du plan (π) d'équation :

$$(56) \quad (\pi) \left| 2\rho_Z \cos(L_e - L_Z) X + \rho_Z \sin(L_e - L_Z) (Y - 2\rho_a) - 2\rho_e Z = 0. \right.$$

Le plan (π) passe par le point $\omega (X=0, Y=2\rho_a, Z=0)$ centre de la base elliptique (P) du cylindre (σ) dans le plan $Z=0$, décrite par le point P d'anomalie excentrique $L - L_e$.

Ce résultat étend au cas tridimensionnel celui de LAWREN [21] concernant les transferts plans.

I,3.2.5. SYSTÈMES DE PROPULSION (S_1) - NOMBRE D'ARCS DE POUSSÉE - SOLUTIONS IMPULSIONNELLES.

Plaçons nous dans le cas où $p_\tau = 0$, c'est-à-dire où la courbe d'efficacité $(\mathcal{P})$ est une courbe fermée.

Si la durée du transfert correspond à un nombre entier N de tours $(\Delta L = 2N\pi)$, suivant la position initiale $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$ sur l'orbite [ou encore la position initiale $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P}$ sur la courbe d'efficacité $(\mathcal{P})$ (fig. 7)] le nombre n d'arcs de poussée maximale est égal à :

$$n = \begin{cases} Nn_1 \\ Nn_1 + 1 \end{cases}$$

où n_1 est le nombre d'arcs de $(\mathcal{P})$ à l'extérieur de la sphère (Σ) .

Ce résultat s'étend au cas impulsif [$(\mathcal{P})$ tangent à (Σ) en n_1 points] (fig. 8a et 8b). Mais nous verrons que dans ce cas, l'application d'une impulsion en chacun des n points précédemment envisagés n'est pas toujours obligatoire si $F_{max} = \infty$ (Dans le cas de la figure 7b, en particulier, il est possible de réduire les impulsions en $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_f$ à une seule impulsion en $\mathcal{P}_0$ ou $\mathcal{P}_f$).

Si maintenant : $2N\pi < \Delta L < 2(N+1)\pi$ et si la solution n'est pas impulsif, on a : $Nn_1 \leq n \leq (N+1)n_1 + 1$. Si la solution est impulsif, il faut distinguer entre les transferts en moins d'un tour ($0 < \Delta L < 2\pi$) où $(\mathcal{P})$ peut présenter des arcs extérieurs à (Σ) (par exemple fig. 9) et les transferts en plus d'un tour où $(\mathcal{P})$ ne peut pas présenter d'arc extérieur à (Σ) et où : $Nn_1 \leq n \leq (N+1)n_1$.

La détermination de n_1 est donc fondamentale. $2n_1$ est le nombre des racines en u de l'équation :

$$(57) \quad \overrightarrow{p_V}^2 - 1 = PKK^T P^T - 1 = 0$$

()^T = transposition

Les éléments de la matrice carrée symétrique (6×6) :

$$(58) \quad B = rKK^T =$$

$B_{\xi\xi}$	$B_{\xi\eta}$	0	0	0	0
$B_{\eta\xi}$	$B_{\eta\eta}$	0	0	0	0
0	0	$B_{a\alpha}$	$B_{a\alpha}$	$B_{a\beta}$	$B_{a\tau}$
0	0	$B_{\alpha a}$	$B_{\alpha\alpha}$	$B_{\alpha\beta}$	$B_{\alpha\tau}$
0	0	$B_{\beta a}$	$B_{\beta\alpha}$	$B_{\beta\beta}$	$B_{\beta\tau}$
0	0	$B_{\tau a}$	$B_{\tau\alpha}$	$B_{\tau\beta}$	$B_{\tau\tau}$

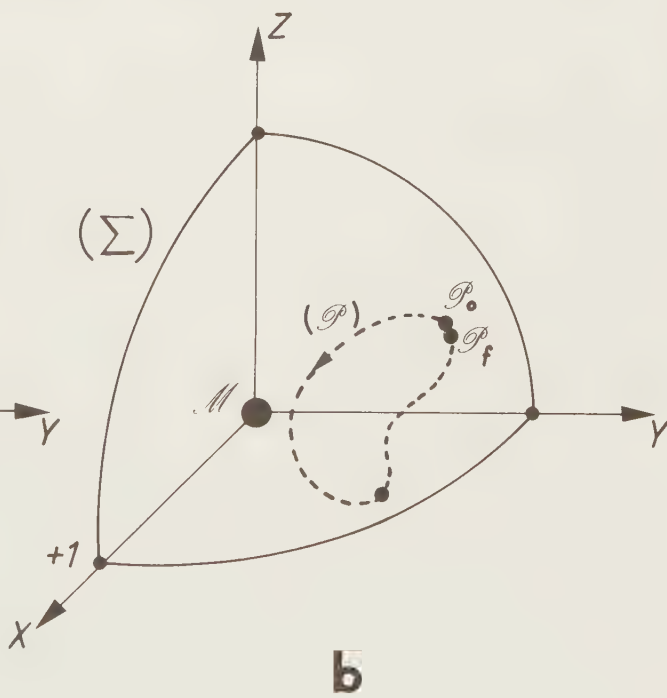
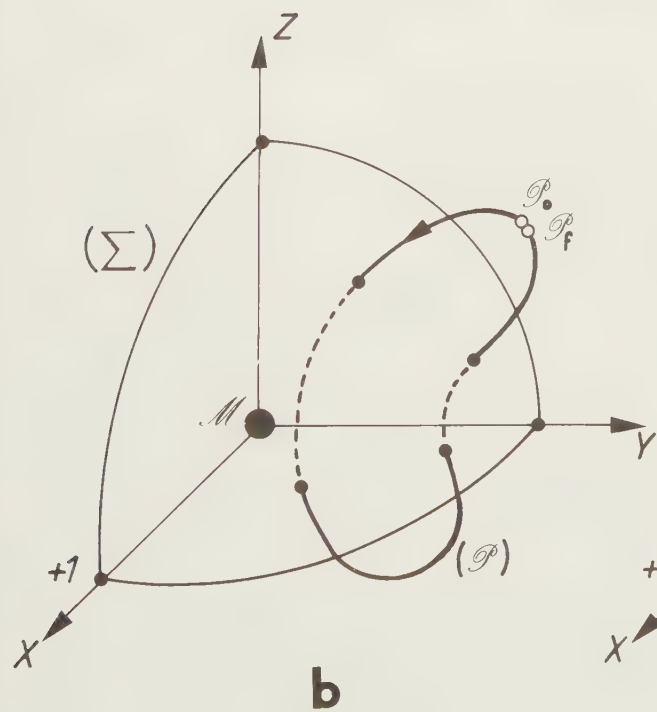
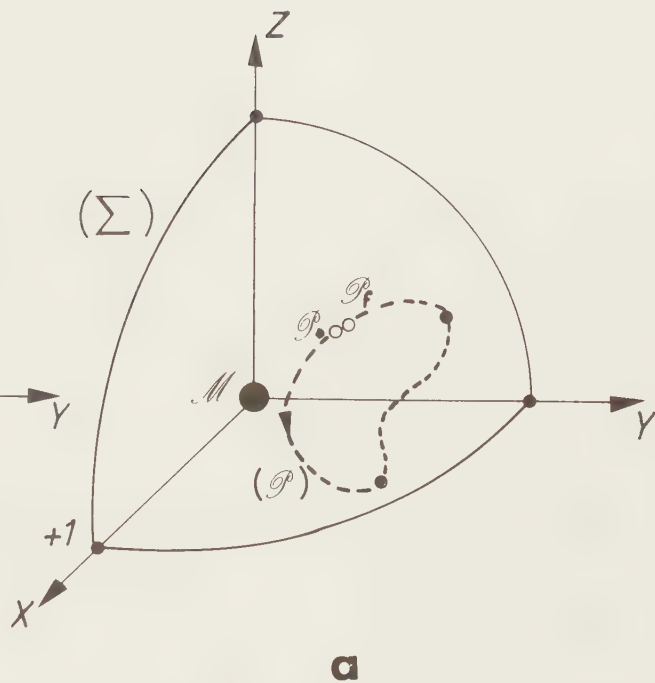
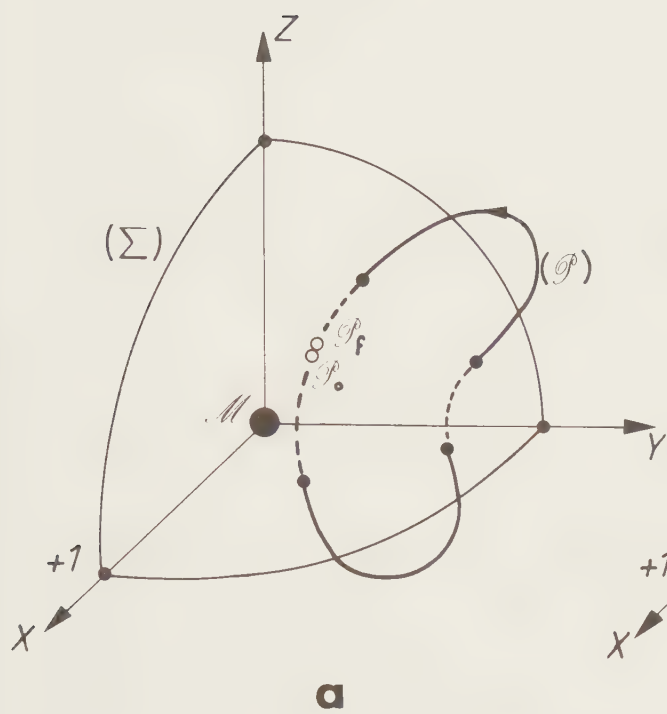


Fig. 7 - Nombre d'arcs de poussée maximale
(cas d'un nombre entier de tours).

Fig. 8 - Nombre d'impulsions
(cas d'un nombre entier de tours).

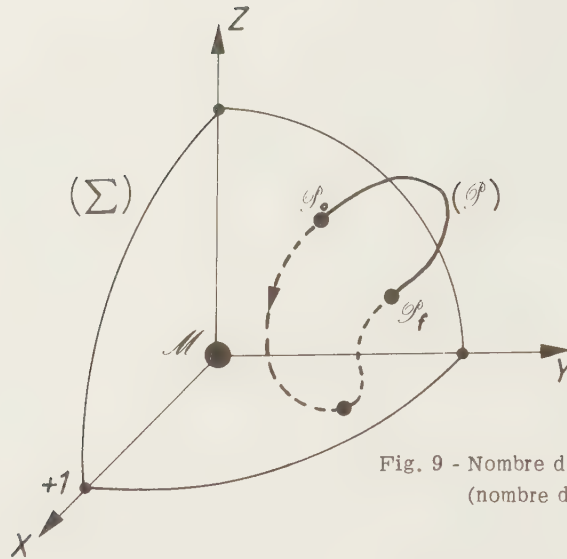


Fig. 9 - Nombre d'impulsions
(nombre de tours non entier).

sont donnés en Annexe 6. Les éléments du mineur relatif à l'élément $B_{\tau\tau}$ (qui sont les seuls qui nous intéressent ici, car $p_{\tau} = 0$) sont des polynômes en $\sin u$ et $\cos u$. Plus exactement, les éléments diagonaux et l'élément $B_{\alpha\alpha}$ sont des polynômes $P(\cos u)$ en $\cos u$ de degré 1 ou 3. Les autres éléments sont de la forme $\sin u Q(\cos u)$, où $Q(\cos u)$ est un polynôme en $\cos u$ de degré 0 ou 2.

Dans le cas général ($p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\alpha}, p_{\alpha}$ et p_{β} non nuls), l'équation (57) s'écrit donc :

$$(59) \quad 1 - e \cos u = PBP^T = P_3(\cos u) + \sin u Q_2(\cos u).$$

Soit encore :

$$(60) \quad P_3'(\cos u) = \sin u Q_2(\cos u)$$

et en élevant au carré :

$$P_6(\cos u) = \sin^2 u Q_4(\cos u) = Q_6(\cos u)$$

soit finalement :

$$(61) \quad P_6'(\cos u) = 0.$$

Cette équation admet, au maximum, six racines en $\cos u$. Pour chacune de ces racines, $\sin u$ est bien déterminé par l'équation (60). Ce retour à l'équation (60) élimine les racines parasites introduites par l'élevation au carré.

Il y a donc, au maximum, six points de commutation c'est-à-dire trois arcs de $(\mathcal{P})$ extérieurs à (Σ) . Donc : $n_1 \leq n_{1\max} \leq 3$ où $n_{1\max}$ est la valeur maximale de n_1 pour l'ensemble des transferts (c'est-à-dire lorsque $e, p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\alpha}, p_{\alpha}$ et p_{β} prennent des valeurs quelconques). On ne peut pas écrire $n_{1\max} = 3$, car rien ne prouve *a priori* que les racines de (61) soient réelles et que les inégalités $-1 \leq \cos u \leq +1$, $-1 \leq \sin u \leq +1$ soient vérifiées.

Nous démontrerons cependant au § II,5.3. qu'il existe, au moins pour certains transferts particuliers entre orbites elliptiques de faible excentricité ($\varepsilon \ll e \ll 1$), des solutions à $n_1 = 3$ impulsions par révolution. Donc, pour tous les transferts entre orbites elliptiques ($\varepsilon \ll e < 1$), on peut affirmer que $n_{1\max} = 3$ donc que $n_1 \leq 3$.

Par contre, pour les transferts entre quasi-cercles ($e \leq$ ordre $\varepsilon \ll 1$) où l'orbite nominale est circulaire ($e = 0$), nous avons vu au paragraphe précédent que la courbe d'efficacité est une ellipse qui ne peut avoir que deux arcs extérieurs à la sphère (Σ) . Il ne peut donc pas y avoir plus de deux

arcs de poussée par révolution et comme les solutions à deux arcs de poussée (ou deux impulsions) se rencontrent fréquemment, on en conclut que $n_1 \leq 2$ dans ce cas.

Nous avons raisonné jusqu'à présent dans le cas du transfert le plus général. Le même raisonnement s'applique à des classes de transferts plus particulières.

TRANSFERTS PARTICULIERS.

Les degrés des polynômes P et Q dans (59) dépendent du choix des paramètres $p_\xi, p_\eta, p_a, p_\alpha$ et p_β qui ont une valeur non nulle. Les variations des éléments orbitaux correspondants sont imposées. Les autres variations sont indifférentes ou, *exceptionnellement*, imposées. En effet, une composante de l'adjoint peut être nulle alors que la variation de l'élément correspondant est imposée. Il suffit pour cela que cette variation imposée coïncide justement avec la variation induite qui serait obtenue dans le problème où cette variation serait considérée comme indifférente.

Compte tenu du caractère exceptionnel de cette éventualité, nous associerons à un choix des paramètres $p_\xi, p_\eta, p_a, p_\alpha$ et p_β qui ont une valeur non nulle, la classe des transferts pour lesquels les variations des éléments orbitaux correspondants sont imposées. Il y a ainsi, en général, $2^5 - 1 = 31$ classes distinctes de transferts.

En Annexe 7, les degrés des polynômes P et Q ainsi qu'une borne supérieure du nombre maximum admissible n_1 d'arcs de poussée maximale par révolution sont donnés en fonction de la classe de transferts considérée.

Cette borne supérieure est égale à 3 pour la plupart des classes de transferts, sauf pour la variation optimale du demi-grand axe Δa où elle est égale à 1 et pour la rotation optimale du plan de l'orbite ($\Delta \xi, \Delta \eta$) où elle est égale à 2 (bien que le degré de P soit égal à 3 et celui de Q à 2, car P et Q contiennent $r = 1 - e \cos u \neq 0$ en facteur).

Lorsque $Q = 0$, l'équation (59) est une équation en $\cos u$ seul. Les points de commutation et les arcs de poussée maximale sont symétriques par rapport au grand axe.

Dans le cas des transferts entre orbites quasi-circulaires ($e \leq \text{ordre } \varepsilon \ll 1$), où l'orbite nominale est circulaire ($e = 0$), nous verrons au chapitre I,4. que le nombre des classes de transferts à envisager passe de 31 à 19 (voir Annexe 7).

Selon la classe de transferts considérée, $\vec{P}_V^2$ peut être fonction de $\sin^2 L$ et $\cos^2 L$ (c'est-à-dire, finalement, de $\sin L$ seul ou $\cos L$ seul) ce qui entraîne une symétrie des arcs de poussée maximale par rapport à $\vec{Ox}$ et à $\vec{Oy}$, donc par rapport à 0, ou bien fonction de $\sin L$ seul (symétrie par rapport à $\vec{Oy}$) ou bien fonction de $\cos L$ seul (symétrie par rapport à $\vec{Ox}$) ou enfin de $\sin L$ et $\cos L$ (pas de symétrie par rapport aux axes $\vec{Ox}$ et $\vec{Oy}$).

Si on exclut les cas singuliers (du problème linéarisé) étudiés au paragraphe suivant, le nombre maximum admissible d'arcs de poussée maximale par révolution est égal à 2 sauf pour la variation optimale du demi-grand axe où il est égal à 1 (voir § II,1.2.).

I,3.2.6. SYSTÈMES DE PROPULSION (S_1) - CAS SINGULIERS (DU PROBLÈME LINÉARISÉ).

Il peut arriver que, dans certains transferts (sans rendez-vous), la courbe d'efficacité ($\mathcal{P}$) soit entièrement située sur la sphère (Σ) (fig. 10).

Le Principe du Maximum ne permet pas, du moins dans l'étude linéarisée, de déterminer dans ce cas singulier le module F de la poussée entre les valeurs 0 et $F_{\max}$, ni la position des arcs de poussée. Il faut alors avoir recours à une étude directe et la solution n'est, en général, pas unique mais *dégénère* en un grand nombre de solutions. Cette "dégénérescence" est, en général, levée par une étude aux ordres supérieurs (voir Chapitre II,4. et § II,5.3.). Il faut donc bien distinguer ces cas singuliers du problème linéarisé du cas singulier signalé au § I,2.3. conduisant aux "arcs

à poussée intermédiaire".

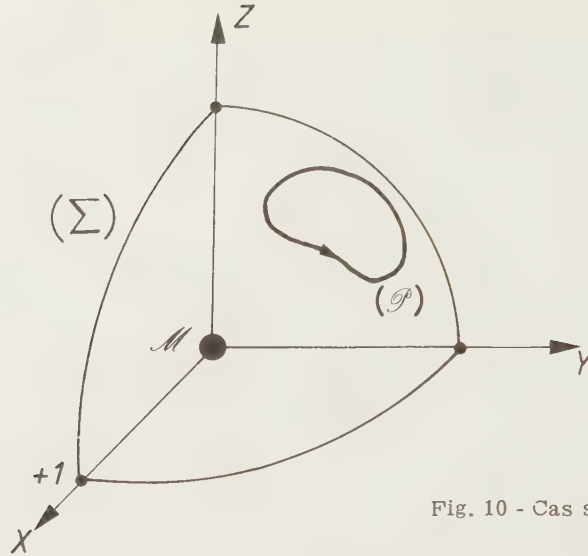


Fig. 10 - Cas singulier.

Pour qu'un tel cas singulier se présente, il faut et il suffit que le polynôme $P'_e(\cos u)$ donné en (61) soit identiquement nul ce qui conduit aux conditions :

$$(a) \equiv e \left(p_\xi^2 - \frac{p_\eta^2}{b^2} - b^2 p_\alpha^2 + p_\beta^2 \right) = 0$$

$$(b) \equiv -p_\xi^2 + \frac{1+2e^2}{b^2} p_\eta^2 + 3b^2 p_\alpha^2 + (2e^2-3) p_\beta^2 = 0$$

$$(c) \equiv e - e p_\xi^2 - \frac{e(2+e^2)}{b^2} p_\eta^2 + 4e p_\alpha^2 + 8b^2 p_\alpha p_\beta - 3eb^2 p_\alpha^2 - e(2-e^2) p_\beta^2 = 0$$

$$(62) \quad (d) \equiv -1 + p_\xi^2 + \frac{e^2}{b^2} p_\eta^2 + 4p_\alpha^2 + b^2 p_\alpha^2 + (4-3e^2) p_\beta^2 = 0$$

$$(f) \equiv e \left(\frac{p_\xi p_\eta}{b} - b p_\alpha p_\beta \right) = 0$$

$$(g) \equiv -\frac{(1+e^2)}{b} p_\xi p_\eta + b(3-e^2) p_\alpha p_\beta = 0$$

$$(h) \equiv \frac{e}{b} p_\xi p_\eta + 4b p_\alpha p_\beta - bep_\alpha p_\beta = 0$$

(avec $b = \sqrt{1-e^2}$)

Ces équations ne peuvent être simultanément vérifiées que si $e = 0$ et :

$$(63) \text{ Ibis} \quad p_a = \frac{\varepsilon_a}{2} (\varepsilon_a = \pm 1), \quad p_e = p_z = 0$$

$$(64) \text{ III} \quad p_a = 0, \quad p_e = \frac{1}{2}, \quad p_z = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad L_z = \begin{cases} L_e \\ L_e + \pi \end{cases}$$

Il n'y a donc aucune solution singulière (du problème linéarisé) pour $e \neq 0$.

Dans le cas circulaire $e = 0$, il y a deux types de solutions singulières :

le type I bis correspond à une courbe d'efficacité $(\mathcal{P})$ réduite à un point ω situé à l'un des points d'intersection $(Y = \varepsilon_a = \pm 1)$ de la sphère (Σ) et de l'axe $\mathcal{M}\vec{Y}$ (fig. 11). La poussée optimale est donc tangentielle. Ce cas sera étudié en détails aux § II,1.3.2.2., II,3.3.2.5. et II,5.2.1.3.

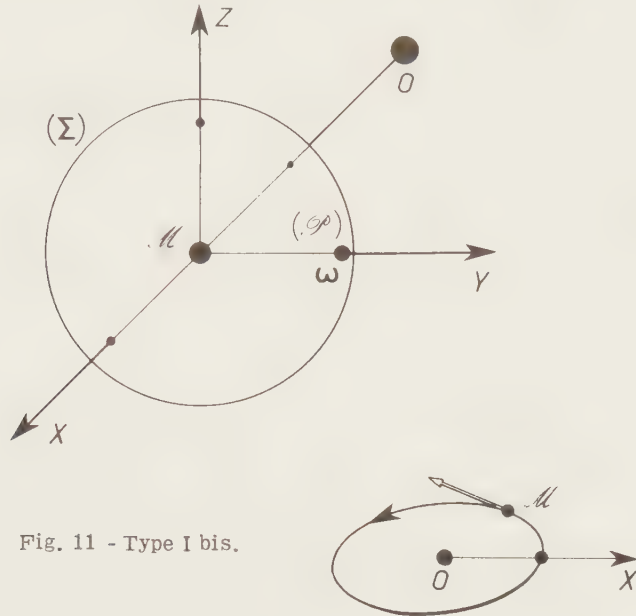


Fig. 11 - Type I bis.

Dans le type III, la courbe d'efficacité $(\mathcal{P})$ coïncide avec l'un des grands cercles (C^+) ($L_Z - L_e = 0$) ou (C^-) ($L_Z - L_e = \pi$) de (Σ) situés dans les plans (π^+) ou (π^-) tangents à l'orbite et faisant des angles égaux à $\pm 30^\circ$ avec le plan horizontal local $X=0$ (fig. 12).

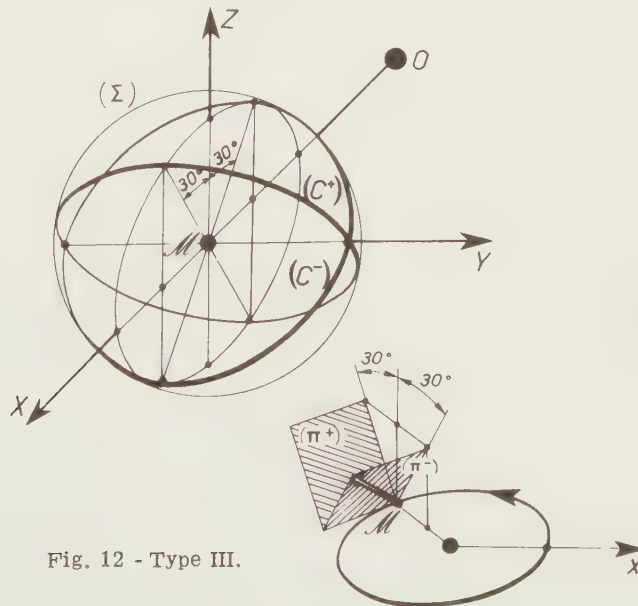


Fig. 12 - Type III.

La poussée optimale est située dans l'un de ces plans. Aux points $L = L_e$ et $L_e + \pi$ la poussée est tangentielle ($X = Z = 0$, $Y = \pm 1$).

Ce cas sera étudié en détails au § II,5.2.1.3.

I,3.3. DÉTERMINATION DES VARIATIONS DES ÉLÉMENTS ORBITAUX EN FONCTION DE L'ADJOINT (INTÉGRATION).

Portant la loi de poussée optimale qui vient d'être déterminée en fonction de l'adjoint (§ I,3.2.) dans les équations du mouvement (36), il vient, sous forme matricielle :

$$(65) \quad \delta \mathcal{X}' = r K \left[\gamma \right] = r \frac{\gamma}{|\vec{p}_V|} K P_V^T = \frac{\gamma}{|\vec{p}_V|} r K K^T P^T = \frac{\gamma}{|\vec{p}_V|} B P^T$$

d'où, en intégrant de u_0 à u_f :

(66)

$$\Delta \mathcal{X} = G P^T$$

avec :

$$(67) \quad G = \int_{u_0}^{u_f} \frac{\gamma}{|\vec{p}_V|} B du =$$

$G_{\xi\xi}$	$G_{\xi\eta}$	0	0	0	0
$G_{\eta\xi}$	$G_{\eta\eta}$	0	0	0	0
0	0	$G_{a\alpha}$	$G_{a\alpha}$	$G_{a\beta}$	$G_{a\tau}$
0	0	$G_{\alpha a}$	$G_{\alpha\alpha}$	$G_{\alpha\beta}$	$G_{\alpha\tau}$
0	0	$G_{\beta a}$	$G_{\beta\alpha}$	$G_{\beta\beta}$	$G_{\beta\tau}$
0	0	$G_{\tau a}$	$G_{\tau\alpha}$	$G_{\tau\beta}$	$G_{\tau\tau}$

matrice carrée
symétrique (6 × 6)

L'équation fournissant la consommation s'écrit d'autre part :

(68)

$$\Delta C = \int_{u_0}^{u_f} \gamma_{\max} U(\Theta) r du$$

$$(\Theta = |\vec{p}_V| - 1) \quad (S_1)$$

ou bien

$$\Delta J = \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_f} r \vec{p}_V^2 du = \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_f} r P K K^T P^T = \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_f} P B P^T du$$

soit

(69)

$$\Delta J = \frac{1}{2} P G P^T$$

$$(S_2)$$

I,3.3.1. SYSTÈMES (S_2).

Le calcul de la matrice G est simple pour les systèmes (S_2). En effet, dans ce cas, $\gamma = |\vec{p}_V|$ et il suffit d'intégrer la matrice B dont les éléments sont des polynômes en $\sin u$, $\cos u$ et u , ce qui ne présente aucune difficulté, si ce n'est la longueur des calculs.

Les éléments de G sont donnés dans l'Annexe 8.

I,3.3.2. SYSTÈMES (S_1) .

Par contre, dans le cas des systèmes (S_1) , $\gamma = \gamma_{\max} \cup (\theta)$ et $|\vec{p}_v|$ subsiste au dénominateur de l'intégrand. Il faut donc, d'abord, déterminer les points de commutation (racines de $\theta = 0$), puis calculer une intégrale de forme compliquée.

L'intégration ne peut être effectuée que dans un certain nombre de cas particuliers.

I,3.4. RECHERCHE DE L'ADJOINT A PARTIR DES VARIATIONS DES ÉLÉMENTS ORBITAUX (INVERSION).

La résolution du problème d'optimisation implique enfin la détermination a posteriori des composantes non nulles, donc inconnues, de l'adjoint cinématique (et des variations non imposées, donc inconnues, des éléments orbitaux) en fonction des variations imposées des éléments orbitaux. Cela permet de fixer la loi de poussée optimale (courbe directrice, courbe d'efficacité) et, d'autre part, de calculer la consommation.

I,3.4.1. SYSTÈMES (S_2) .

Dans le cas des systèmes (S_2) , cette détermination est aisée car la matrice G ne contient pas l'adjoint cinématique P .

Le système (66) est linéaire par rapport aux inconnues (composantes non nulles de l'adjoint cinématique et variations non imposées des éléments orbitaux).

Le problème d'optimisation est donc entièrement soluble, dans le cas général, pour les systèmes de propulsion (S_2) comme l'ont signalé ROSS et LEITMANN [36] dans le cas du transfert et EDELBAUM [37] dans le cas du rendez-vous.

Par exemple, si toutes les variations des éléments orbitaux sont imposées, l'adjoint cinématique P s'obtient par inversion de l'équation matricielle (66) :

$$(70) \quad P = \Delta \mathcal{X}^T G^{-1}.$$

Portant cette valeur dans l'équation de consommation, il vient :

$$(71) \quad \Delta J = P_{\max} |\Delta m| = \frac{1}{2} \Delta \mathcal{X}^T G^{-1} \Delta \mathcal{X}$$

L'indice de performance ΔJ est donc une forme quadratique des variations des éléments orbitaux.

La présentation des résultats peut être envisagée de la façon suivante. Posant :

$$(72) \quad \zeta = \frac{\Delta \mathcal{X}}{\sqrt{2 P_{\max} |\Delta m| \Delta t}}$$

l'équation (71) devient :

$$(73) \quad \zeta^T \langle G \rangle^{-1} \zeta = 1$$

$$\text{où } \langle G \rangle = \frac{G}{\Delta t} \text{ et } \Delta t = u_f - e \sin u_f - (u_o - e \sin u_o)$$

Cette équation est celle d'une hyperquadratique dans l'espace à six dimensions des "variations réduites" ζ .

La discussion générale du problème se ramène à l'étude des déformations de cette hyperquadrique lorsque Δu varie, pour une valeur de l'excentricité e et une position initiale u_0 fixée (au total, trois paramètres de discussion).

Dans le cas d'un nombre entier N de révolutions, la discussion ne fait intervenir que le paramètre e dans le cas des transferts [voir équation (I,4-3)], mais les trois paramètres e , u_0 et Δu dans le cas des rendez-vous.

Pour un grand nombre de révolutions [$N \geq \text{ordre } \frac{1}{\varepsilon}$] la discussion ne fait intervenir que le paramètre e aussi bien dans le cas des transferts que dans celui des rendez-vous [si $\Delta \tau_1 / \Delta u$ est pris comme sixième composante; voir équation (I,4-10)].

Dans le cas où l'orbite nominale est circulaire ($e = 0$), la discussion ne fait plus intervenir que ΔL (voir § II,3.3.1.) (prendre l'axe $\vec{Ox}$ suivant l'axe de symétrie de l'arc de transfert $\widehat{u_0 u_f}$).

Si, de plus, il y a un nombre entier N de révolutions, aucune discussion n'est nécessaire dans le cas des transferts et il y a discussion en fonction de ΔL (ou N) dans le cas des rendez-vous.

Enfin, dans le cas d'un grand nombre de révolutions [$N \geq \text{ordre } \frac{1}{\varepsilon}$], aucune discussion n'est nécessaire (si $\Delta \tau_1 / \Delta L$ est pris comme sixième composante).

Notons que la discussion, utilisant les variations réduites ζ , ne fait intervenir aucun paramètre relatif au système de propulsion.

Lorsque certaines variations des éléments orbitaux ne sont pas imposées, il suffit de s'intéresser aux déformations lorsque Δu varie (pour u_0 et e fixés) de la projection de l'hyperquadrique définie plus haut sur l'hyperespace (ou espace, plan, droite) des variations fixées, parallèlement à l'hyperespace (ou espace, plan, droite) des variations indifférentes.

I,3.4.2. SYSTÈMES (S_1).

Dans le cas des systèmes (S_1), la détermination envisagée au début du § I,3.4. est délicate car la matrice G dépend non seulement de e, u_0 et u_f mais également de l'adjoint cinématique P ; elle ne peut être, en général, effectuée que par un calcul par approximations successives.

Cependant, si cette détermination est possible, on obtient une expression analytique de l'adjoint cinématique P de la forme :

$$(74) \quad P = P \left(e, u_0, u_f = u_0 + \Delta u, \lambda = \frac{\Delta \mathcal{X}}{F_{\max} \Delta t} \right)$$

qui détermine a posteriori la loi de poussée optimale (ici $\Delta \mathcal{X}$ ne représente que la partie imposée des variations des éléments). Portant cette valeur dans l'équation de consommation, il vient :

$$(75) \quad \lambda_c = \frac{\Delta C}{F_{\max} \Delta t} = \frac{W / \Delta m}{F_{\max} \Delta t} = \lambda_c \left(e, u_0, u_f = u_0 + \Delta u, \lambda \right)$$

[Pour un nombre entier de révolutions $\Delta u = 2N\pi$ dans le cas elliptique ($e \neq 0$) ou pour un angle de transfert quelconque dans le cas circulaire ($e = 0$), Δt coïncide avec Δu ; λ_c n'est autre que le rapport $\Delta t_{\text{prop}} / \Delta t$ de la durée totale des arcs de poussée maximale sur la durée du transfert].

On obtient alors une formule explicite donnant la consommation en fonction des paramètres du transfert : $e, u_0, u_f, \Delta \mathcal{X}$ (imposé) et de la poussée maximale $F_{\max}$ qui n'intervient que dans les rapports λ .

Il est utile d'introduire alors les "variations spécifiques" :

$$(76) \quad v = \frac{\Delta \mathcal{X}}{\Delta C} = \frac{\Delta \mathcal{X}}{W / \Delta m} = \frac{\lambda}{\lambda_c} = v \left(e, u_0, u_f = u_0 + \Delta u, \lambda \right)$$

c'est-à-dire les variations par unité de vitesse caractéristique.

Il est également utile de considérer les variations réduites ζ [introduites précédemment dans le cas des systèmes (S_2)] afin de pouvoir comparer les performances des deux types de propulsion.

Notons que v et ζ sont liés par :

$$(77) \quad \zeta = v \sqrt{\lambda_c}$$

et que $\zeta = v$ pour $\lambda_c = 1$ c'est-à-dire lorsque la poussée maximale F_{max} est appliquée de façon continue.

REMARQUE :

Le paramètre v est plus intéressant que le paramètre ζ pour les solutions impulsives, car alors $v \rightarrow$ limite finie $\neq 0$, alors que $\zeta \rightarrow 0$.

La discussion complète du problème fait intervenir non seulement les paramètres e, u_o et Δu [qui intervenaient dans la discussion, pour le système (S_2)] mais encore tous les paramètres λ imposés.

Le même genre de simplifications que dans le cas du système (S_2) est introduit par les hypothèses : nombre entier ou grand nombre de révolutions, excentricité de l'orbite nominale égale à zéro, etc ...

Si l'inversion analytique est impossible, il faut avoir recours au calcul par *approximations successives*, éventuellement facilité par le tracé préalable d'un certain nombre d'abaques dans l'espace adjoint P . Si le nombre des composantes non nulles de P est égal à 2, on trace les lignes :

$$(78) \quad \lambda = \frac{\Delta \mathcal{X}}{F_{max} \Delta t} = \lambda(e, u_o, \Delta u, P) = \text{cte}$$

et

$$(79) \quad \lambda_c = \frac{\Delta \mathcal{C}}{F_{max} \Delta t} = \lambda_c(e, u_o, \Delta u, P) = \text{cte}.$$

Connaissant alors $e, u_o, \Delta u, \Delta \mathcal{X}$ imposé, F_{max} on en déduit les valeurs λ , d'où P (et la poussée optimale) et λ_c (consommation) par interpolation. Un exemple d'une telle résolution est donné au § II,2.3.2.2.

I,3.5. CRITÈRE DE COMPARAISON DES PERFORMANCES DES SYSTÈMES DE PROPULSION (S_1) ET (S_2).

Afin de mettre en évidence la pénalisation entraînée par la non modulation de la vitesse d'éjection, un système de propulsion (S_2) peut être comparé pour la mission donnée à des systèmes (S_1) de même puissance installée P_{max} et à vitesse d'éjection W constante. Afin de ne pas multiplier le nombre de systèmes (S_1) servant à la comparaison, nous n'en retiendrons que deux types :

1. *Système (S_{1c})* : la vitesse d'éjection W est telle que la poussée maximale F_{max} soit appliquée de façon continue.
2. *Système (S_{1*})* : la vitesse d'éjection W est égale à la vitesse d'éjection W^* optimale pour la mission considérée, donnée par l'équation (I,2-43) qui s'écrit, dans l'étude linéarisée :

$$(80) \quad \int_{t_o}^{t_f} U(\theta) \left(\frac{|\vec{p}_V|}{-2} \right) dt = \int_{u_o}^{u_f} U(\theta) \left(\frac{|\vec{p}_V|}{-2} \right) r du = 0.$$

Ce sont les variations réduites $\zeta = \frac{\Delta \mathcal{X}}{\sqrt{2 P_{max} |\Delta m| \Delta t}}$ qui serviront de base de comparaison entre les systèmes (S_1) et (S_2) puisque leur définition ne fait intervenir, comme paramètre de propulsion, que la puissance P_{max} qui est la même, par hypothèse, pour tous ces systèmes.

Notons que pour les systèmes (S_1) de même puissance P_{max} ,

$$|\zeta| = \sqrt{\lambda \nu} = f(e, u_o, u_f = u_o + \Delta u, \Delta \mathcal{X}, W)$$

et le transfert $(e, u_o, u_f = u_o + \Delta u, \Delta \mathcal{X})$ étant donné, les paramètres $|\zeta|$ ne sont fonctions que de la vitesse d'éjection et sont simultanément maximums pour $W = W^*$ ce qui fournit un moyen de calculer W^* sans utiliser l'équation (80) (voir § II, 1.3.1.3. et II, 2.3.2.3.).

En conclusion de ce chapitre, soulignons la complexité du problème des transferts entre orbites proches dans le cas d'un système de propulsion (S_1) à vitesse d'éjection constante, par rapport au cas d'un système de propulsion (S_2) à vitesse d'éjection modulable.

Alors que dans ce dernier cas le problème est soluble pour un transfert avec rendez-vous quelconque, la résolution, dans le premier cas, se heurte à trois difficultés essentielles :

- détermination des points de commutation (racines de l'équation $\Theta = 0$ de degré ≤ 6),
- intégration compliquée,
- inversion difficile.

Aussi ne peut-on espérer le résoudre que dans un certain nombre de cas particuliers (Deuxième Partie). Cependant quelques résultats généraux concernant les découplages peuvent être énoncés. Ils font l'objet du chapitre suivant.

1.4. RÉSULTATS GÉNÉRAUX. DÉCOUPLAGES

Nous séparerons l'étude relative aux systèmes de propulsion (S_2) où les découplages sont fréquents, de celle relative aux systèmes de propulsion (S_1) où seule la "non-induction" peut se présenter.

I,4.1. CAS DES SYSTÈMES DE PROPULSION (S_2) (VITESSE D'ÉJECTION MODULABLE).

I,4.1.1. DÉCOUPLAGE ENTRE LA ROTATION DU PLAN DE L'ORBITE ET LES MODIFICATIONS DANS LE PLAN DE L'ORBITE.

La forme (I,3 - 67) de la matrice G qui peut être décomposée en deux matrices carrées 2×2 et 4×4 symétriques montre que lorsque aucune modification dans le plan de l'orbite n'est imposée $(p_\alpha = p_\alpha = p_\beta = p_\tau = 0)$, il n'apparaît pas de telle modification induite par la rotation $\Delta \xi, \Delta \eta$ du plan de l'orbite.

Inversement, si la rotation du plan de l'orbite n'est pas imposée $(p_\xi = p_\eta = 0)$, il n'apparaît pas de rotation de ce plan induite par les modifications $\Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \tau$ dans le plan de l'orbite.

La matrice G ne dépendant pas de l'adjoint P , il y a, de plus, *découplage* entre le problème de la rotation du plan de l'orbite et le problème des modifications de l'orbite dans son plan : les valeurs des composantes $p_{\xi}, p_{\eta}, p_a, p_{\alpha}, p_{\beta}, p_{\tau}$ de P calculées à partir des variations $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta a, \Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\tau$ ne sont autres que les valeurs p_{ξ}, p_{η} d'une part et $p_a, p_{\alpha}, p_{\beta}, p_{\tau}$ d'autre part que l'on obtiendrait à partir des variations $\Delta\xi, \Delta\eta$ d'une part, et $\Delta a, \Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\tau$ d'autre part, en résolvant *successivement* le problème de la rotation du plan et le problème des modifications de l'orbite dans son plan.

L'équation (I,3 - 41) montre alors que l'accélération optimale relative au problème global est la somme vectorielle des accélérations optimales relatives aux problèmes composants. De même, l'équation (I,3 - 69) montre que les consommations s'ajoutent algébriquement.

I,4.1.2. CAS D'UN NOMBRE ENTIER DE TOURS.

Les éléments de la matrice G donnés en Annexe 8 montrent que dans le cas où $\Delta u = u_f - u_o = 2N\pi$, le mineur relatif à l'élément $G_{\tau\tau}$ de G est diagonal.

(1) $G =$

$G_{\xi\xi}$	0	0	0	0	0
0	$G_{\eta\eta}$	0	0	0	0
0	0	G_{aa}	0	0	$G_{a\tau}$
0	0	0	$G_{\alpha\alpha}$	0	$G_{\alpha\tau}$
0	0	0	0	$G_{\beta\beta}$	$G_{\beta\tau}$
0	0	$G_{\tau a}$	$G_{\tau\alpha}$	$G_{\tau\beta}$	$G_{\tau\tau}$

Dans le cas d'un transfert sans rendez-vous ($p_{\tau}=0$), si la variation d'un seul des cinq premiers éléments orbitaux $\xi, \eta, a, \alpha, \beta$ est imposée, il n'y a pas de variation induite des quatre autres éléments. Il y a même découplage entre les variations des cinq premiers éléments au sens que nous avons donné à ce mot au paragraphe précédent.

Comme $p_{\tau} = 0$, l'équation (I,3 - 69) montre que seul le mineur relatif à l'élément $G_{\tau\tau}$ de G intervient dans le calcul de la consommation ΔJ . Ce mineur étant diagonal, ΔJ est une *fonction linéaire et homogène des carrés des variations $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta a, \Delta\alpha, \Delta\beta$* .

$$\Delta J = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\xi^2}{G_{\xi\xi}} + \frac{\Delta\eta^2}{G_{\eta\eta}} + \frac{\Delta a^2}{G_{aa}} + \frac{\Delta\alpha^2}{G_{\alpha\alpha}} + \frac{\Delta\beta^2}{G_{\beta\beta}} \right) =$$

$$\frac{1}{2\Delta u} \left[2\Delta\xi^2 + \frac{2(1-e^2)}{1+4e^2} \Delta\eta^2 + \frac{\Delta a^2}{4} + \frac{2\Delta\alpha^2}{5(1-e^2)} + \frac{2\Delta\beta^2}{5-4e^2} \right].$$

L'hyperquadrique envisagée au § I,3.4.1. a pour équation (dans l'espace des cinq variations réduites ζ)

$$2\zeta_{\xi}^2 + \frac{2(1-e^2)}{1+4e^2} \zeta_{\eta}^2 + \frac{\zeta_a^2}{4} + \frac{2\zeta_{\alpha}^2}{5(1-e^2)} + \frac{2\zeta_{\beta}^2}{5-4e^2} = 1.$$

Dans le cas $p_r \neq 0$ (ce qui ne peut se produire que dans le cas du rendez-vous) l'équation (I,3 - 69) montre que ΔJ n'a pas une forme aussi simple car G n'est pas diagonale.

Il est cependant démontré en Annexe 9 que si on choisit comme sixième variation non plus $\Delta \tau$, relatif au rendez-vous, mais

$$(4) \quad \Delta \tau_1 = \Delta \tau - \Delta \tau_{t.s.}$$

la nouvelle matrice G_1 est diagonale.

Dans (4), $\Delta \tau_{t.s.}$ représente la variation de τ dans le *transfert simple* optimal correspondant au rendez-vous considéré, induite par les variations de a , α et β .

$\Delta \tau_1$ est le *supplément* nécessaire pour assurer le rendez-vous.

Si la nouvelle variation d'état cinématique est :

$$(5) \quad \Delta \mathcal{X}_1 = \begin{vmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \\ \Delta a \\ \Delta \alpha \\ \Delta \beta \\ \Delta \tau_1 \end{vmatrix}$$

alors :

$$(6) \quad \Delta J = \frac{1}{2} (\Delta \mathcal{X}_1)^T G_1^{-1} \Delta \mathcal{X}_1$$

où G_1 est, cette fois, une matrice diagonale. D'où :

$$(7) \quad \Delta J = \Delta J_{t.s.} + \Delta J_1 = \Delta J_{t.s.} + \frac{\Delta \tau_1^2}{2 G_{1\tau\tau}}$$

où $\Delta J_{t.s.}$ est donné en (2) et où :

$$(8) \quad G_{1\tau\tau} = G_{\tau\tau} - \frac{G_{a\tau}^2}{G_{aa}} - \frac{G_{\alpha\tau}^2}{G_{\alpha\alpha}} - \frac{G_{\beta\tau}^2}{G_{\beta\beta}} \quad \Delta u \rightarrow \infty \quad \frac{3}{4} \Delta u^3.$$

Donc, pour un grand nombre de tours :

$$(9) \quad \Delta J_1 \sim \frac{2 \Delta \tau_1^2}{3 \Delta u^3}.$$

L'hyperquadratique envisagée au § I,3.4.1. a pour équation (dans l'espace des six variations réduites ζ) :

$$(10) \quad 2\zeta_\xi^2 + \frac{2(1-e^2)}{1+4e^2} \zeta_\eta^2 + \frac{\zeta_a^2}{4} + \frac{2\zeta_\alpha^2}{5(1-e^2)} + \frac{2\zeta_\beta^2}{5-4e^2} + \frac{4\zeta_1^2}{3\Delta u^2} = 1.$$

Nous retrouvons le fait que ce n'est pas $\Delta \tau$, mais bien $\Delta \tau_1 / \Delta u$ qui est à comparer avec les variations des cinq premiers éléments. Comme $\Delta \tau_1 < \pi$, lorsque $N \gg \frac{1}{\varepsilon}$ le rendez-vous ne coûte qu'un supplément négligeable.

I,4.1.3. CAS D'UN ANGLE DE TRANSFERT QUELCONQUE.

Il serait évidemment souhaitable d'étendre les résultats précédents concernant les découplages au cas où le mobile n'effectue pas un nombre entier de tours (ni un grand nombre de tours).

Remarquons tout d'abord que le découplage complet entre la rotation du plan de l'orbite et les modifications dans le plan de l'orbite permet de choisir les axes où sont repérés $\vec{\Delta Z}_{plan}$ et $\vec{p}_Z$ indépendamment de ceux où sont repérés $\vec{\Delta e}_{plan}$ et $\vec{p}_e$.

Si, pour repérer $\vec{\Delta Z}_{plan}$ et $\vec{p}_Z$, nous prenons non plus les axes $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$ comme précédemment

mais les axes $\vec{Ox}_1, \vec{Oy}_1$ (du plan $\vec{Ox}, \vec{Oy}$) qui diagonalisent la matrice symétrique 2×2 :

$$(11) \quad G_1 = \begin{vmatrix} G_{\xi\xi} & G_{\xi\eta} \\ G_{\eta\xi} & G_{\eta\eta} \end{vmatrix}$$

les variations $\Delta\xi_1$ et $\Delta\eta_1$ sont découplées.

De même, en choisissant pour repérer $\vec{\Delta e}_{plan}$ et $\vec{p}_e$ les axes $\vec{Ox}_2, \vec{Oy}_2$ (du plan Ox, Oy) qui diagonalisent la matrice symétrique 2×2 :

$$(12) \quad G_2 = \begin{vmatrix} G_{\alpha\alpha} & G_{\alpha\beta} \\ G_{\beta\alpha} & G_{\beta\beta} \end{vmatrix}$$

on découple les variations $\Delta\alpha_2$ et $\Delta\beta_2$. Ce dernier choix n'est pas très intéressant pour $e \neq 0$ car Δa et $\Delta\alpha_2$ d'une part et Δa et $\Delta\beta_2$ d'autre part restent couplés et de plus, $\Delta\alpha_2$ et $\Delta\beta_2$ ne peuvent plus être rattachés simplement, comme l'étaient précédemment $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta/e$, à la variation Δe d'excentricité et à la rotation de l'orbite dans son plan.

Dans le cas où l'orbite nominale est circulaire ($e = 0$) les axes $\vec{Ox}_1$ et $\vec{Ox}_2$ sont confondus avec l'axe de symétrie de l'arc de transfert $\mathcal{M}_o \mathcal{M}_f$ que l'on a alors évidemment intérêt à prendre comme axe de référence $\vec{Ox}$.

I,4.2. CAS DES SYSTÈMES DE PROPULSION (S_1) (VITESSE D'ÉJECTION CONSTANTE)

I,4.2.1. NON-INDUCTION MUTUELLE ENTRE LA ROTATION DU PLAN DE L'ORBITE ET LES MODIFICATIONS DANS LE PLAN DE L'ORBITE.

La forme de la matrice G (décomposable en deux matrices carrées 2×2 et 4×4 symétriques) ressemble à celle relative aux systèmes (S_2). Lorsque aucune modification dans le plan de l'orbite n'est imposée ($p_a = p_\alpha = p_\beta = p_\tau = 0$), il n'apparaît pas de telle modification induite par la rotation $\Delta\xi, \Delta\eta$ du plan de l'orbite. Inversement, si la rotation du plan de l'orbite n'est pas imposée ($p_\xi = p_\eta = 0$) il n'apparaît pas de rotation de ce plan induite par les modifications $\Delta a, \Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\tau$ dans le plan de l'orbite.

Cependant, contrairement au résultat obtenu pour le système (S_2), il n'y a pas découplage entre la rotation du plan de l'orbite et les modifications dans le plan de l'orbite. En effet, la matrice G dépend de l'adjoint P qui n'est pas le même selon qu'on considère le problème de la rotation ou celui des modifications dans le plan, ou encore celui du transfert global. Il n'y a pas addition des solutions.

I,4.2.2. CAS D'UN NOMBRE ENTIER DE TOURS.

La propriété de *non-induction* dépend des éléments nuls de la matrice G . Outre les éléments nuls figurés en (I,3 - 67) et expliquant les résultats obtenus au paragraphe précédent, d'autres éléments peuvent s'annuler dans des conditions particulières.

Par exemple, considérons le cas d'un nombre entier N de tours ($\Delta u = 2N\pi$) pour des transferts tels que $e \neq 0$. Si $|\vec{p}_v|$ est une fonction de $\cos u$ seul (dans l'Annexe 7 ce cas correspond à $Q \equiv 0$), les éléments du mineur de G relatif à l'élément $G_{\tau\tau}$ correspondant à des éléments de B de la forme $\sin u Q(\cos u)$ sont nuls. En effet un tel élément s'écrit :

$$(13) G_{ij} = \int_{u_0}^{u_f = u_0 + 2N\pi} \delta_{max} \frac{U \left(\frac{|\vec{p}_V|}{-1} \right)}{|\vec{p}_V|} Q(\cos u) \sin u \, du = \int_{u_0}^{u_0 + 2N\pi} f(\cos u) \sin u \, du = 0$$

Dans ces conditions le mineur de $G_{\tau\tau}$ s'écrit :

(14) mineur de $G_{\tau\tau} =$

$G_{\xi\xi}$	0	0	0	0
0	$G_{\eta\eta}$	0	0	0
0	0	G_{aa}	$G_{a\alpha}$	0
0	0	$G_{\alpha a}$	$G_{\alpha\alpha}$	0
0	0	0	0	$G_{\beta\beta}$

Il est important de remarquer que l'élément $G_{a\alpha} (= G_{\alpha a})$ n'est pas nul et qu'il y a (pour $e \neq 0$) induction mutuelle entre les variations Δa et $\Delta \alpha$.

L'Annexe 7 indique, pour chacune des 31 classes de transferts (sans rendez-vous) correspondant à un ensemble de variations imposées des cinq premiers éléments orbitaux (les variations induites éventuelles des éléments restants étant considérées comme indifférentes) quelles sont les classes de transferts qui, sûrement, ne présentent pas de variations induites et quelles sont les variations induites éventuelles concernant les autres classes de transferts.

Pour les 11 classes de transferts suivantes, il n'y a aucune autre variation que celles qui sont imposées. Il n'est pas certain que ce soient les seules mais cela paraît vraisemblable :

- $\Delta \xi$ (rotation autour du "paramètre" $\vec{Oy}$),
- $\Delta \eta$ (rotation autour du grand axe $\vec{Ox}$),
- $\Delta \beta$ (rotation de l'orbite dans son plan),
- $\Delta \xi, \Delta \eta$ (rotation du plan de l'orbite),
- $\Delta \xi, \Delta \beta$ (rotation autour d'un axe contenu dans le plan Oyz),
- $\Delta \eta, \Delta \beta$ (rotation autour d'un axe contenu dans le plan Oxz),
- $\Delta a, \Delta \alpha$ (transferts coaxiaux plans),
- $\Delta \xi, \Delta a, \Delta \alpha$ (transferts co-paramètres),
- $\Delta \eta, \Delta a, \Delta \alpha$ (transferts coaxiaux),
- $\Delta a, \Delta \alpha, \Delta \beta$ (transferts plans),

et évidemment :

$\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta a, \Delta \alpha, \Delta \beta$ (transfert général).

Dans le cas des transferts entre orbites quasi-circulaires ($e \leq \text{ordre } \varepsilon \ll 1$), où l'orbite nominale est circulaire ($e = 0$), la non-induction est plus fréquente.

Il n'y a que 19 classes de transferts à considérer, au lieu de 31 car le choix de l'axe de référence est libre.

Par exemple, la classe de transferts où $\Delta \xi$ est seul imposé correspond, à une rotation près, à la classe de transferts où $\Delta \eta$ est seul imposé.

Par contre, la classe de transferts où $\Delta\xi$ et $\Delta\eta$ sont simultanément imposés ne se ramène évidemment pas à l'une des classes ci-dessus. Prenant $\vec{Ox}$ suivant $\vec{\Delta Z}_{\rho/\alpha n}$, elle correspond à $\Delta\xi$ imposé et $\Delta\eta = 0$, donc également imposé, condition qui ne figure pas plus haut.

En Annexe 7, les classes faisant double emploi ont été mentionnées.

1. Si $|\vec{\rho_V}|$ est uniquement fonction de $\sin^2 L$ ou $\cos^2 L$ c'est-à-dire finalement fonction de $\sin L$ ou $\cos L$ seul, les éléments du mineur de G relatif à l'élément $G_{\tau\tau}$ correspondant à des éléments de B de la forme $\sin L \ Q(\cos L)$ ou $\cos L \ R(\sin L)$ (où Q et R sont des polynômes) sont nuls. Le mineur est alors diagonal :

(15) mineur de $G_{\tau\tau} =$

$G_{\xi\xi}$	0	0	0	0
0	$G_{\eta\eta}$	0	0	0
0	0	G_{aa}	0	0
0	0	0	$G_{\alpha\alpha}$	0
0	0	0	0	$G_{\beta\beta}$

Les variations imposées n'induisent aucune autre variation.

2. Si $|\vec{\rho_V}|$ est fonction de $\sin L$ seul, les éléments du mineur de G relatif à l'élément $G_{\tau\tau}$ correspondant à des éléments de B de la forme $\cos L \ R(\sin L)$ sont nuls.
Le mineur s'écrit alors :

(16) mineur de $G_{\tau\tau} =$

$G_{\xi\xi}$	0	0	0	0
0	$G_{\eta\eta}$	0	0	0
0	0	G_{aa}	0	$G_{a\beta}$
0	0	0	$G_{\alpha\alpha}$	0
0	0	$G_{\beta a}$	0	$G_{\beta\beta}$

3. Si $|\vec{\rho_V}|$ est fonction de $\cos L$ seul les éléments du mineur de G relatifs à l'élément $G_{\tau\tau}$ correspondant à des éléments de B de la forme $\sin L \ Q(\cos L)$ sont nuls. Le mineur s'écrit alors :

(17) mineur de $G_{\tau\tau} =$

$G_{\xi\xi}$	0	0	0	0
0	$G_{\eta\eta}$	0	0	0
0	0	G_{aa}	$G_{a\alpha}$	0
0	0	$G_{\alpha a}$	$G_{\alpha\alpha}$	0
0	0	0	0	$G_{\beta\beta}$

4. Enfin si $|\vec{\rho_V}|$ est fonction de $\sin L$ et $\cos L$, G a la forme (I,3 - 67).

Les propriétés de non-induction figurant en Annexe 7 s'en déduisent aisément.

Sur les 19 classes de transferts à considérer, il y en a au moins 14 pour lesquelles les variations imposées n'induisent aucune autre variation.

En particulier cela est vrai pour toutes les classes où la variation d'un seul élément ou bien les variations de deux éléments sont imposées.

Ce dernier résultat est évident pour les classes envisagées sauf peut être pour la classe où $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ sont simultanément imposés ou bien la classe où $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ et Δa sont simultanément imposés. En effet $|\vec{\rho_V}|$ est alors fonction de $\sin L$ et $\cos L$ et, par exemple pour la première classe mentionnée plus haut, il n'est pas a priori évident qu'il n'y ait pas une variation Δa induite. En fait, ayant obtenu que dans les transferts où seul $\Delta\alpha$ est imposé il n'y a pas de variation Δa et $\Delta\beta$ induite par cette variation, il y a équivalence, à une rotation près, entre le problème où $\Delta\alpha$ est seul imposé et le problème où $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta = 0$ sont imposés (bien que ces deux problèmes ne fassent pas partie de la même classe). Comme, pour le premier, il n'y a pas de variation Δa induite, il n'y en a pas également pour le second.

Même raisonnement pour la seconde classe ($\Delta\xi$, $\Delta\eta$, Δa) mentionnée.

I,4.2.3. CAS D'UN ANGLE DE TRANSFERT QUELCONQUE ENTRE QUASI-CERCLES.

Dans le cas $\varphi = 0$, le choix de l'axe de référence $\vec{Ox}$ est arbitraire. Il est pratique de prendre $\vec{Ox}$ suivant l'axe de symétrie de l'arc de transfert $\mathcal{M}_o\mathcal{M}_f$. Si alors le problème à traiter est, avec ce choix d'axe, tel que $|\vec{\rho_V}|$ puisse être considéré comme fonction de $\cos L$ seul, les éléments du mineur de G relatif à l'élément $G_{\tau\tau}$ correspondant à des éléments de B de la forme $\sin L Q(\cos L)$ (Q = polynôme) sont nuls. Le mineur a alors la forme (17).

Cette propriété est vraie en particulier lorsque la rotation $\Delta\eta$ autour de $\vec{Ox}$ (ou $\Delta\xi$ autour de $\vec{Oy}$) est seule imposée. Il n'y a pas alors de rotation induite autour de $\vec{Oy}$ (ou $\vec{Ox}$), ni évidemment de variation induite des autres éléments (voir § II,2.3.1.2.).



II - PROBLÈMES PARTICULIERS

Les difficultés rencontrées dans la Première Partie de l'étude, lors de la tentative de résolution analytique du problème général des transferts optimaux entre orbites proches pour les systèmes de propulsion à vitesse d'éjection constante, montrent clairement que la solution complète n'a de chance d'être obtenue que pour des classes particulières de transferts.

Les problèmes particuliers considérés dans cette Deuxième Partie de l'étude sont relatifs à des classes de transferts qui présentent un intérêt pratique évident.

Leur complexité va croissant, car le nombre des éléments orbitaux dont la variation est imposée augmente et passe de un élément (variation infinitésimale optimale du demi-grand axe; chapitre II,1.) à deux éléments (rotation infinitésimale optimale du plan de l'orbite; chapitre II,2.), puis à trois éléments (transferts optimaux entre orbites circulaires coplanaires proches; chapitre II,3.), à cinq éléments (ramenés à quatre par l'hypothèse $e \simeq 0$, dans les transferts impulsionsnels optimaux entre orbites quasi-circulaires proches, coplanaires ou non; chapitre II,5.), enfin à six éléments (ramenés à cinq par l'hypothèse $e \simeq 0$, dans les rendez-vous de longue durée associés aux transferts qui viennent d'être mentionnés; chapitre II,6.).

En contrepartie, des hypothèses simplificatrices de plus en plus importantes sont faites, du type de celles déjà mentionnées au chapitre I,4. :

1. nombre entier de révolutions,
2. grand nombre de révolutions ($N \gg \text{ordre } \frac{1}{\varepsilon}$),
3. orbites elliptiques de faible excentricité ($\varepsilon \ll e \ll 1$),
4. orbites quasi-circulaires ($e \ll \text{ordre } \varepsilon \ll 1$),
5. solutions impulsionsnelles ou quasi-impulsionsnelles.

Certaines de ces hypothèses peuvent d'ailleurs être cumulées.

Fort heureusement, les hypothèses 2, 3, 4, 5 correspondent à des cas qui se rencontrent très souvent dans la pratique (l'hypothèse 2, essentiellement, pour des satellites).

Le plan en trois étapes de chacune des trois premières études et de certaines parties des deux dernières est le même que celui adopté dans l'étude générale du chapitre I,3. : détermination de la poussée optimale en fonction de l'adjoint; détermination des variations des éléments orbitaux en fonction de l'adjoint (intégration); recherche de l'adjoint à partir des variations des éléments orbitaux (inversion).

Dans les trois premières études, les performances des systèmes de propulsion (S_1) et (S_2) sont comparées. Dans la première étude (variation optimale du demi-grand axe) le système de propulsion le plus général (S) est même envisagé, vu la relative simplicité du problème.

Le chapitre II,4. montre, à part, comment la solution optimale peut être déterminée par une étude aux ordres supérieurs, lorsque la solution linéarisée est singulière.

II,1. VARIATION INFINITÉSIMALE OPTIMALE DU DEMI-GRAND AXE

II,1.1. INTRODUCTION.

Il s'agit de réaliser la variation Δa du demi-grand axe de l'orbite, les variations des autres éléments étant considérées comme indifférentes. La seule composante non nécessairement nulle de l'adjoint cinématique $\mathcal{P}$ est p_a . Ce problème est important dans la pratique (variation de la période de l'orbite).

II,1.2. POUSSÉE OPTIMALE.

L'équation (I,3 - 41) montre que le vecteur efficacité

$$(1) \quad \vec{p}_V = 2 p_a \vec{V}$$

est proportionnel à la vitesse $\vec{V}$.

L'accélération de poussée optimale $\vec{y}$ est donc portée par la tangente à l'orbite et dirigée vers l'avant si $p_a > 0$, l'arrière si $p_a < 0$. Elle est antisymétrique par rapport au grand axe de l'orbite.

La courbe d'efficacité ($\mathcal{P}$) est un cercle du plan $\mathcal{MXY}$ (fig. 1 a).

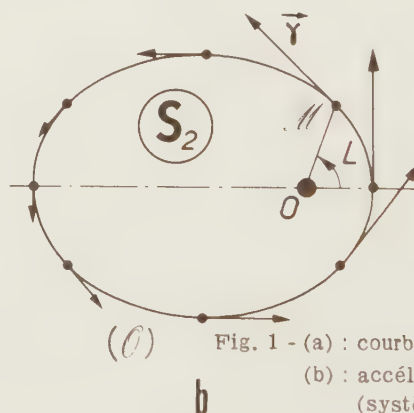
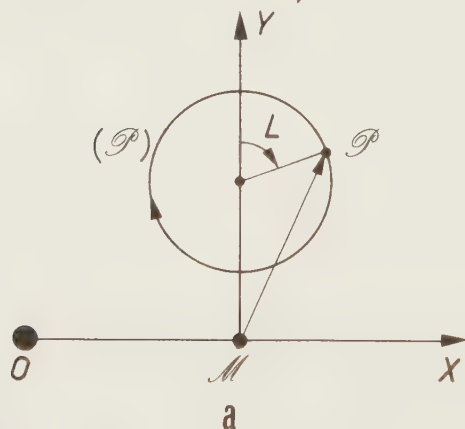


Fig. 1 - (a) : courbe d'efficacité
(b) : accélération optimale (système S_2).

$$(2) \quad \vec{\mathcal{M}\mathcal{P}} = \vec{p}_V \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2 p_a}{b} e \sin L \\ y = \frac{2 p_a}{b} (1 + e \cos L) \end{array} \right. \quad (b = \sqrt{1 - e^2}).$$

On sait, en effet, que l'hodographe d'un mouvement elliptique est un cercle lorsqu'on choisit les axes tournants comme axes de référence (de même que lorsqu'on choisit les axes fixes).

L'orbite directrice coïncide avec l'orbite elle-même (voir § I,3.2.2.).

Pour le système de propulsion (S_2), l'accélération de poussée optimale $\vec{y}$ est modulée proportionnellement à la vitesse $\vec{V}$ (fig. 1 b).

Dans le cas du système de propulsion (S_1), la poussée maximale F_{max} est appliquée (si $\Delta L = 2N\pi$) sur un arc symétrique par rapport au périégée (fig. 2 b).

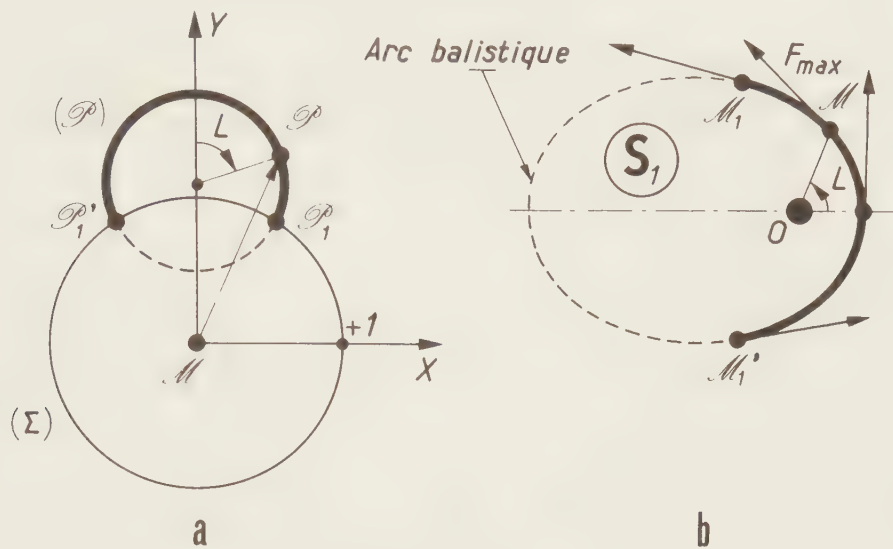


Fig. 2 - (a) : courbe d'efficacité

(b) : poussée optimale (système S_1).

Enfin, dans le cas plus compliqué du système de propulsion (S), on peut trouver par exemple une zone de poussée maximale F_{max} au périégée entourée de deux zones à poussée modulée, puis de deux zones à poussée constante F_A et, enfin, un arc balistique à l'apogée (fig. 3 b).

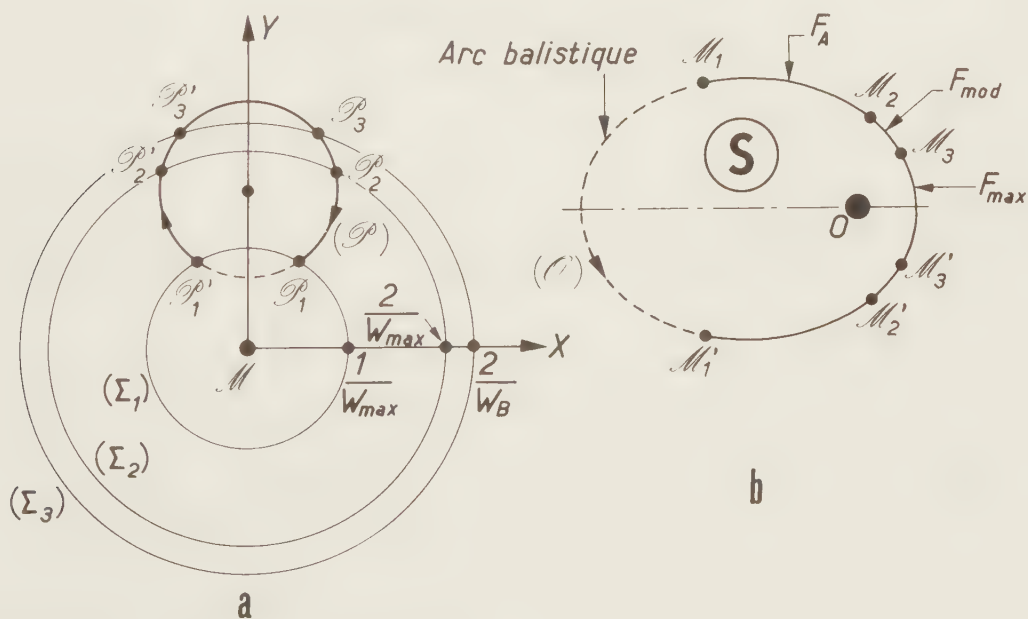


Fig. 3 - (a) : courbe d'efficacité

(b) : modulation optimale de la poussée (système S).

Dans le cas d'une orbite nominale circulaire ($e = 0$), le cercle d'efficacité $(\mathcal{P})$ se réduit à un point ω (fig. 4).

Pour un système de propulsion (S_2) , l'accélération de poussée est constante, horizontale et égale à $\vec{\gamma} = \vec{M}\omega$.

Pour un système de propulsion (S_1) , la poussée maximale est appliquée constamment si ω est à l'extérieur du cercle (Σ) . Si ω est sur (Σ) , nous retrouvons le cas singulier de type I bis signalé au § 1,3.2.6. (fig. 5). La poussée est horizontale, mais seulement astreinte à $0 \leq F \leq F_{max}$. La dégénérescence correspondante sera étudiée plus loin.

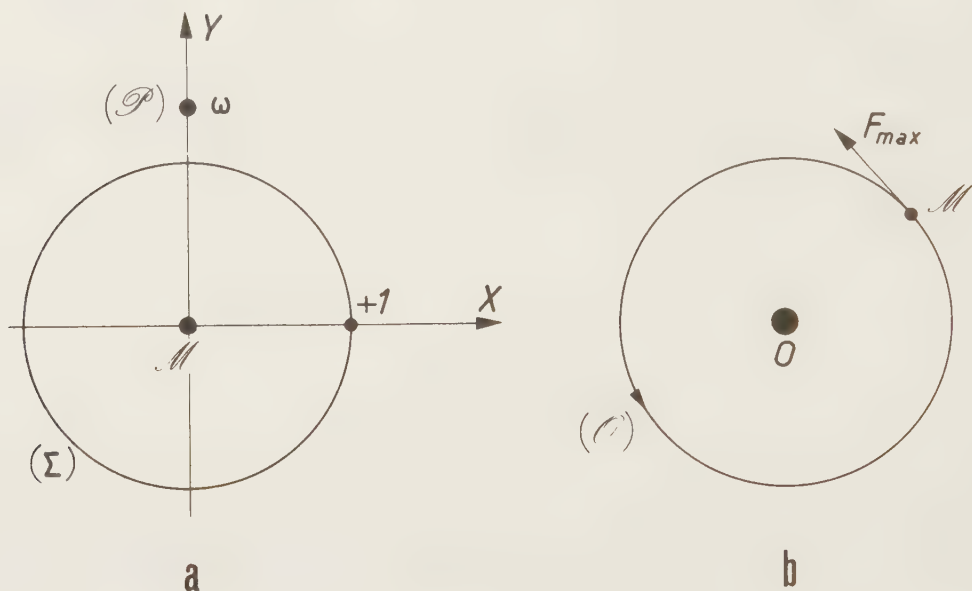


Fig. 4 - (a) : courbe d'efficacité $\rightarrow$ point ω
 (b) : poussée optimale (système S_1).

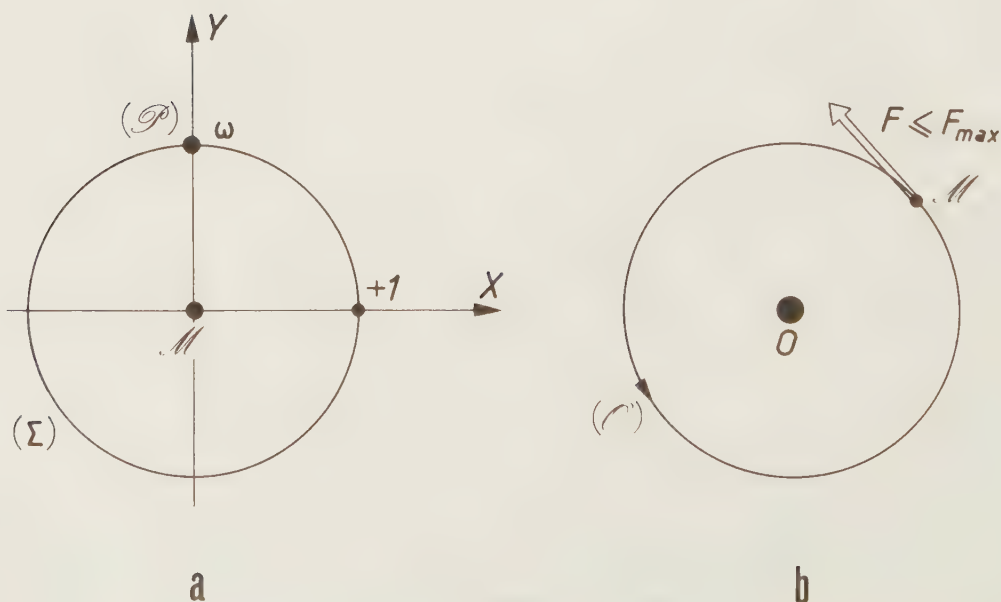


Fig. 5 - (a) : courbe d'efficacité $\rightarrow$ point ω
 (b) : poussée optimale (système S_1)
 Cas singulier I bis.

Enfin, pour un système de propulsion ($\mathcal{S}$), la loi de poussée dépend de la position de ω par rapport aux cercles de centre $\mathcal{M}$ et de rayons $\frac{1}{W_{max}}$, $\frac{2}{W_{max}}$, $\frac{2}{WB}$ (fig. 6).

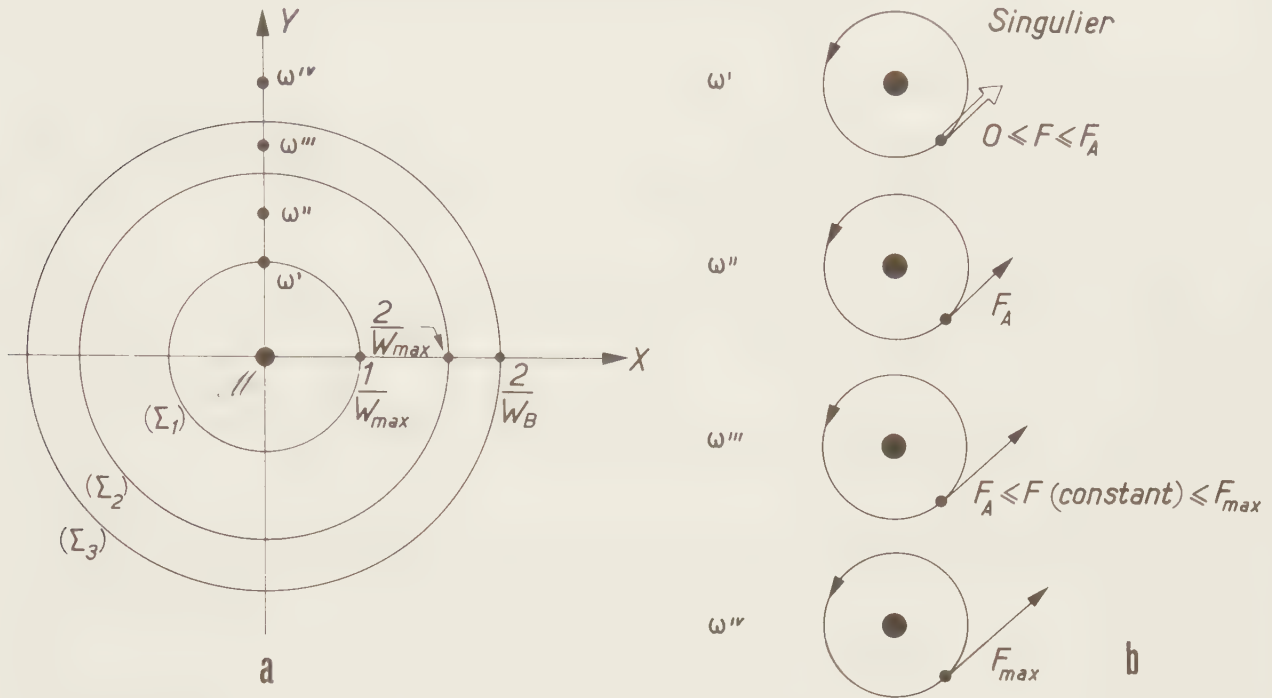


Fig. 6 - (a) : courbe d'efficacité $\rightarrow$ point ω
(b) : poussée optimale (système $\mathcal{S}$).

II,1.3. "DILATATION" OPTIMALE DE L'ORBITE. CONSOMMATION.

II,1.3.1. CAS ELLIPTIQUE. NOMBRE ENTIER DE RÉVOLUTIONS.

Afin de ne pas avoir à discuter en fonction de u_0 nous supposons que le transfert a lieu en un nombre entier de révolutions ($\Delta L = 2N\pi$).

Nous savons, qu'alors, il n'y a pas de variation $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ induites par la variation Δa dans le cas du système ($\mathcal{S}_2$). Pour le système ($\mathcal{S}_1$), il y a variation induite $\Delta\alpha$ de l'excentricité, mais il n'y a pas rotation induite ($\Delta\beta/e$) de l'orbite dans son plan (voir chapitre I,4.).

II,1.3.1.1. SYSTÈME ($\mathcal{S}_2$).

La variation réduite est donnée par l'équation (I,4 - 3) :

$$(3) \quad |\mathcal{J}| = \frac{|\Delta a|}{\sqrt{2 P_{max}} |\Delta m| \Delta L} = \sqrt{\langle G_{aa} \rangle} = 2 \text{ (indépendant de } e \text{)}.$$

II,1.3.1.2. SYSTÈME ($\mathcal{S}_1$).

La variation Δa est donnée par l'équation (I,3 - 66) :

$$\Delta a = G_{aa} p_a = 2 F_{max} (\text{signe } p_a) \int_{u_0}^{u_f} U(\theta) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} du$$

soit :

$$(4) \quad \lambda = \frac{\Delta a}{2 N \pi F_{max}} = \frac{2 (\text{signe } p_a)}{\pi} \begin{cases} E\left(e, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(e, \frac{\pi}{2} - u_1\right) & \text{si } 0 \leq u_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ E\left(e, \frac{\pi}{2}\right) + E\left(e, u_1 - \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq u_1 \leq \pi \end{cases}$$

où $E(k, \varphi)$ est l'intégrale elliptique de seconde espèce de module k et d'argument φ et u_1 le point de commutation. On en déduit aisément : $\text{signe } p_a = \text{signe } \Delta a$.

La consommation est donnée par (I,3 - 68) :

$$\Delta C = \int_{u_0}^{u_f} F_{max} U(\theta) r du = 2 N F_{max} (u_1 - e \sin u_1)$$

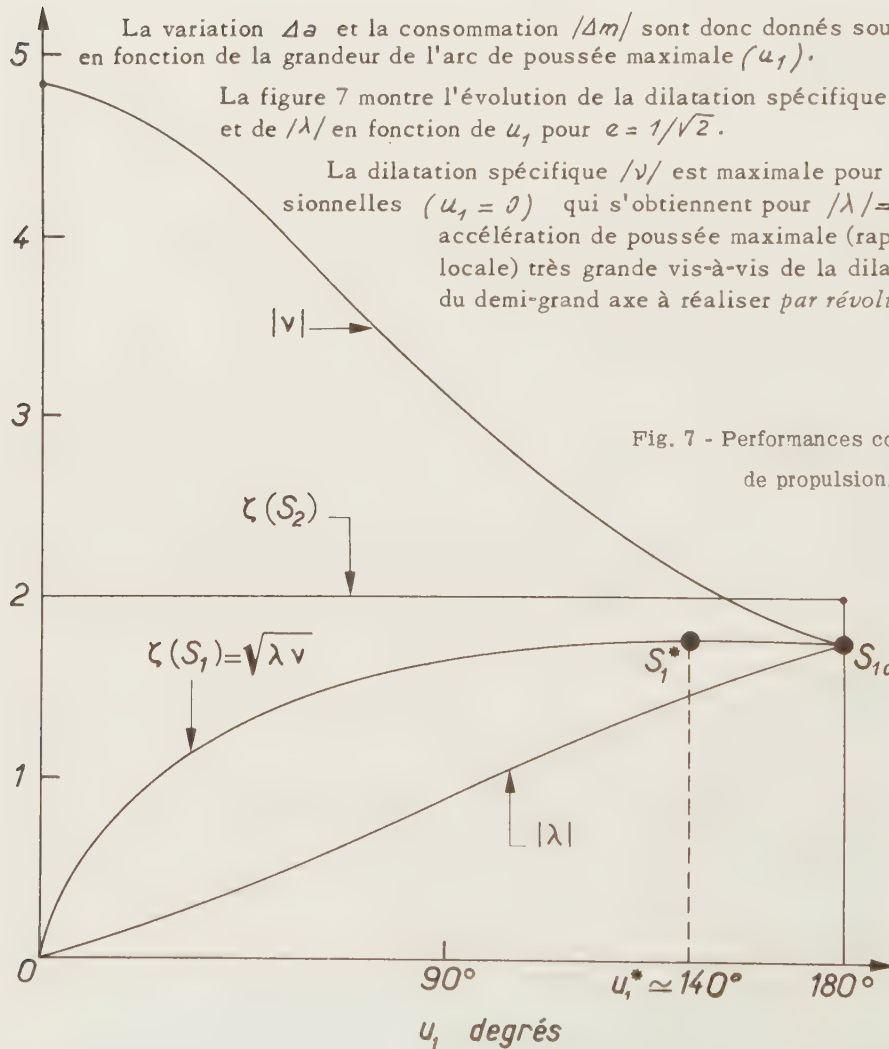
d'où

$$(5) \quad \lambda_c = \frac{\Delta C}{2 N \pi F_{max}} = \frac{W |\Delta m|}{2 N \pi F_{max}} = \frac{u_1 - e \sin u_1}{\pi}.$$

La variation Δa et la consommation $|\Delta m|$ sont donc donnés sous forme paramétrique en fonction de la grandeur de l'arc de poussée maximale (u_1).

La figure 7 montre l'évolution de la dilatation spécifique $|\nu| = |\Delta a| / \Delta C = |\lambda| / \lambda_c$ et de $|\lambda|$ en fonction de u_1 pour $e = 1/\sqrt{2}$.

La dilatation spécifique $|\nu|$ est maximale pour les solutions impulsives ($u_1 = 0$) qui s'obtiennent pour $|\lambda| = 0$ c'est-à-dire une accélération de poussée maximale (rapportée à la pesanteur locale) très grande vis-à-vis de la dilatation relative $|\Delta a|/a$ du demi-grand axe à réaliser par révolution.



Cette dilatation spécifique maximale est égale à :

$$(6) \quad |v|_{max} = \lim_{u_1 \rightarrow 0} |v| = \lim_{u_1 \rightarrow 0} \frac{2 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_1}}{1 - e \cos u_1} = 2 \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

Soit, pour $e = 1/\sqrt{2}$, $|v|_{max} = 4,83$. Elle correspond à l'application de la poussée au point (périgée) d'efficacité maximale.

Au-delà de la valeur :

$$(7) \quad |\lambda|_{max} = \frac{4 E(e)}{\pi}$$

(où $E(k)$ représente l'intégrale elliptique complète de seconde espèce de module k) correspondant à $u_1 = \pi$ c'est-à-dire à la poussée continue, le transfert n'est plus réalisable : F_{max} n'est pas suffisant ou N n'est pas suffisant. La valeur de $|v|$ correspondante est :

$$|v|_{min} = |\lambda|_{max} = \frac{4 E(e)}{\pi}. \text{ Ici, pour } e = 1/\sqrt{2}, |v|_{min} = |\lambda|_{max} = 1,72.$$

Le fait de ne pas pouvoir choisir correctement N et F_{max} pour réaliser une dilatation déterminée peut conduire à une pénalisation sur la consommation spécifique (donc sur la consommation) allant jusqu'à :

$$\frac{\frac{1}{1,72} - \frac{1}{4,83}}{\frac{1}{4,83}} \simeq 1,8 \text{ soit } 180 \text{ } \%. \quad \frac{1}{4,83}$$

II,1.3.1.3. COMPARAISON ENTRE LES SYSTÈMES (S_1) ET (S_2) .

Sur la figure 7 est portée la dilatation réduite

$$|\zeta| = \frac{|\Delta a|}{\sqrt{2} P_{max} |\Delta m| \Delta u} = \sqrt{\lambda v}$$

dans le cas du système (S_1) . Elle est évidemment toujours inférieure à celle obtenue pour le système (S_2) ($|\zeta| = 2$).

Pour le système (S_1) et dans le cas $e = 1/\sqrt{2}$, $|\zeta|$ croît depuis zéro, passe par un maximum très plat pour $u_1 = u_1^* \simeq 140^\circ$, ce qui correspond au choix optimal de la vitesse d'éjection ($W = W^*$), puis décroît faiblement jusqu'à ce que $u_1 = 180^\circ$. Le système (S_1^*) optimal ($W = W^*$) et le système (S_{1c}) correspondant à l'application continue de la poussée ont dans ce cas des performances tout à fait comparables.

La non-modulation de la vitesse d'éjection conduit à une pénalisation sur la dilatation réduite au moins égale à :

$$(8) \quad \frac{\zeta(S_2) - \zeta(S_1^*)}{\zeta(S_2)} = \frac{2 - 1,74}{2} \simeq 0,13$$

soit environ 26 % sur la consommation de propulsif.

REMARQUE : Pour $0 \leq e \leq e_{lim}$ (racine de l'équation $\frac{E(e, \frac{\pi}{2})}{\pi} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$, $u_1^* = 180^\circ$) et $(S_1^*) \equiv (S_{1c})$.

II,1.3.1.4. SYSTÈME (S).

La solution optimale dépend du seul paramètre p_a , (ou mieux du paramètre $W_B p_a$).

Les points de commutation sont donnés par :

$$(9) \quad \begin{cases} \cos u_1 = \cos u'_1 = \frac{1}{e} \frac{1 - 4 p_a^2 W_{max}^2}{1 + 4 p_a^2 W_{max}^2} = \frac{1}{e} \frac{1 - (4 p_a^2 W_B^2 / F^2)}{1 + (4 p_a^2 W_B^2 / F^2)} \\ \cos u_2 = \cos u'_2 = \frac{1}{e} \frac{1 - p_a^2 W_{max}^2}{1 + p_a^2 W_{max}^2} = \frac{1}{e} \frac{1 - (p_a^2 W_B^2 / F^2)}{1 + (p_a^2 W_B^2 / F^2)} \\ \cos u_3 = \cos u'_3 = \frac{1}{e} \frac{1 - p_a^2 W_B^2}{1 + p_a^2 W_B^2} \end{cases}$$

avec
$$f = \frac{F_A}{F_{max}} < 1.$$

La dilatation du demi-grand axe est :

$$(10) \lambda = \frac{\Delta a}{2 N \pi F_{max}} = \frac{2 (\text{signe } p_a)}{\pi} \left\{ f \int_{u_2}^{u_1} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} du + W_B |p_a| \left[u + e \sin u \right]_{u_3}^{u_2} + \int_0^{u_3} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} du \right\}$$

et la consommation :

$$(11) \lambda_c = \frac{W_B |\Delta m|}{2 N \pi F_{max}} = \frac{1}{\pi} \left\{ f^2 \left[u - e \sin u \right]_{u_2}^{u_1} + p_a^2 W_B^2 \left[u + e \sin u \right]_{u_3}^{u_2} + \left[u - e \sin u \right]_0^{u_3} \right\}$$

Les intégrales elliptiques figurant dans (10) ont déjà été calculées pour le système (S_1).

La figure 8 présente l'évolution des points de commutations u_1 , u_2 , u_3 et de la "consommation spécifique" $1/v$ en fonction de $|\lambda|$ pour $e = 1/\sqrt{2}$ et $f = \frac{F_A}{F_{max}} = 0,1$.

De A à B, la zone de poussée avec $F = F_A$ s'étale autour du périégée (u_1 croît depuis zéro).

En B apparaît, au périégée, une zone de poussée modulée ($F_A \ll F \ll F_{max}$) qui s'étale peu à peu (u_2 croît depuis zéro).

En C, la zone balistique disparaît ($u_1 = 180^\circ$).

En D, la zone à poussée constante $F = F_A$ disparaît.

De D à E la poussée est modulée tout le long de l'orbite comme pour un système de propulsion (S_2). Notons qu'alors :

$$\frac{1}{v} = \frac{|\lambda|}{5^2} = \frac{|\lambda|}{4}$$

donc DE est un segment de droite (d'où l'intérêt de considérer $\frac{1}{v}$ et non pas $|v|$).

En E apparaît une zone de poussée maximale F_{max} qui s'étale autour du périégée (u_3 croît depuis zéro).

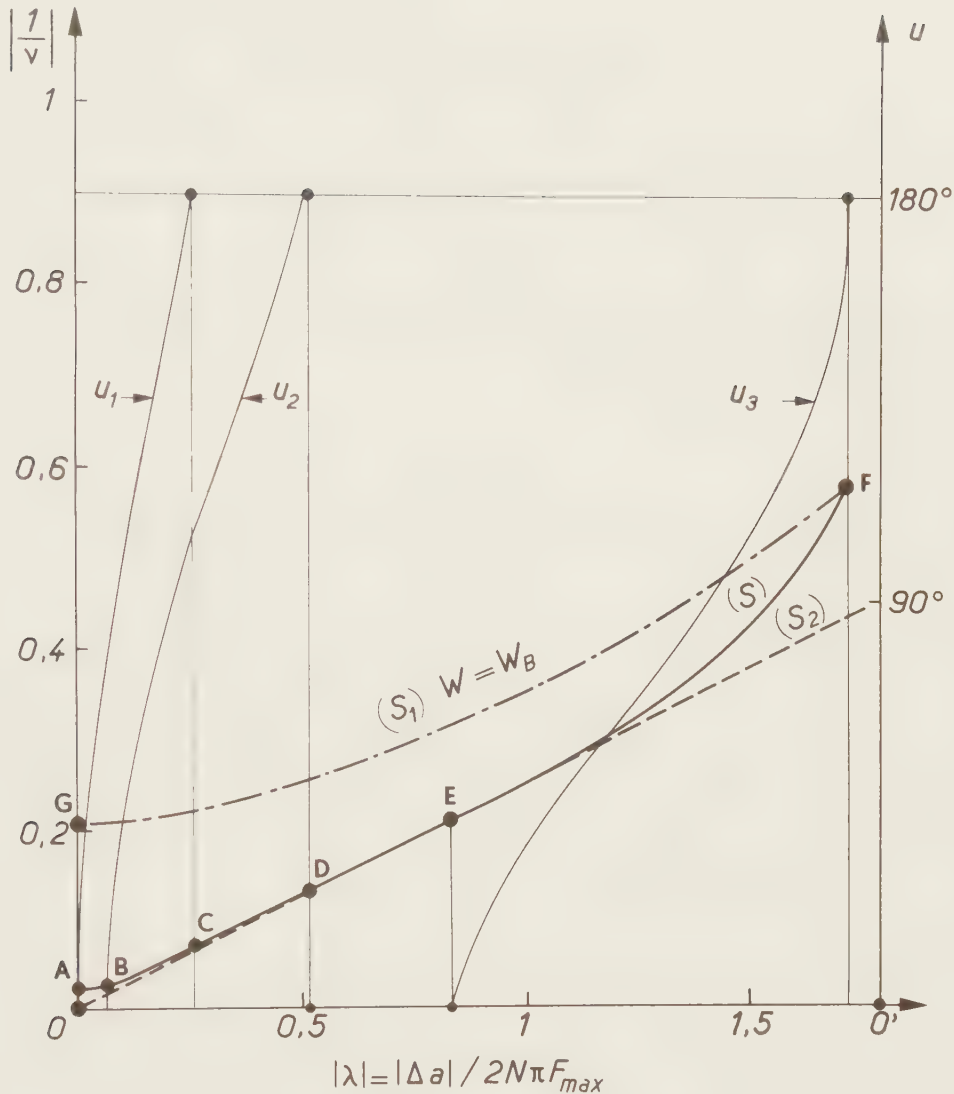


Fig. 8 - Performances du système (S).

($e = 1/\sqrt{2}$, $f = F_A / F_{\max} = 0,1$).

Enfin, au-delà de F correspondant à la poussée maximale continue ($u_3 = 180^\circ$), le transfert est impossible.

On a porté également, sur la figure 8, la consommation spécifique relative au système (S_1) de même puissance installée et de même poussée maximale.

Cette consommation spécifique est évidemment plus forte que dans le cas du système (S) puisque le domaine de commande est réduit.

Par contre, la consommation spécifique ($\frac{1}{|v|} = |\lambda|/4$) relative au système (S_2) de même puissance installée est plus faible que dans le cas du système (S) (ou égale, sur le segment DE) puisque le domaine de commande est agrandi.

Notons que, la consommation spécifique d'un transfert impulsionnel étant indépendante de la

grandeur de la poussée utilisée,

$$\frac{W_B |\Delta m|_G}{|\Delta a|} = \frac{W_{max} |\Delta m|_A}{|\Delta a|}$$

et comme la vitesse d'éjection rentrant dans la définition de $|v|$ est toujours W_B ,

$$OA = \frac{W_B |\Delta m|_A}{\Delta_a} = \frac{W_B}{W_{max}} \frac{W_B |\Delta m|_G}{|\Delta a|} = \frac{W_B}{W_{max}} OG = f OG.$$

La figure 9 montre l'évolution de la poussée optimale dans le cas $|\lambda| = 1,19$ pour $e = 1/\sqrt{2}$ et les systèmes de propulsion (S_1) (S_2) et (S) ($f = 0,1$).

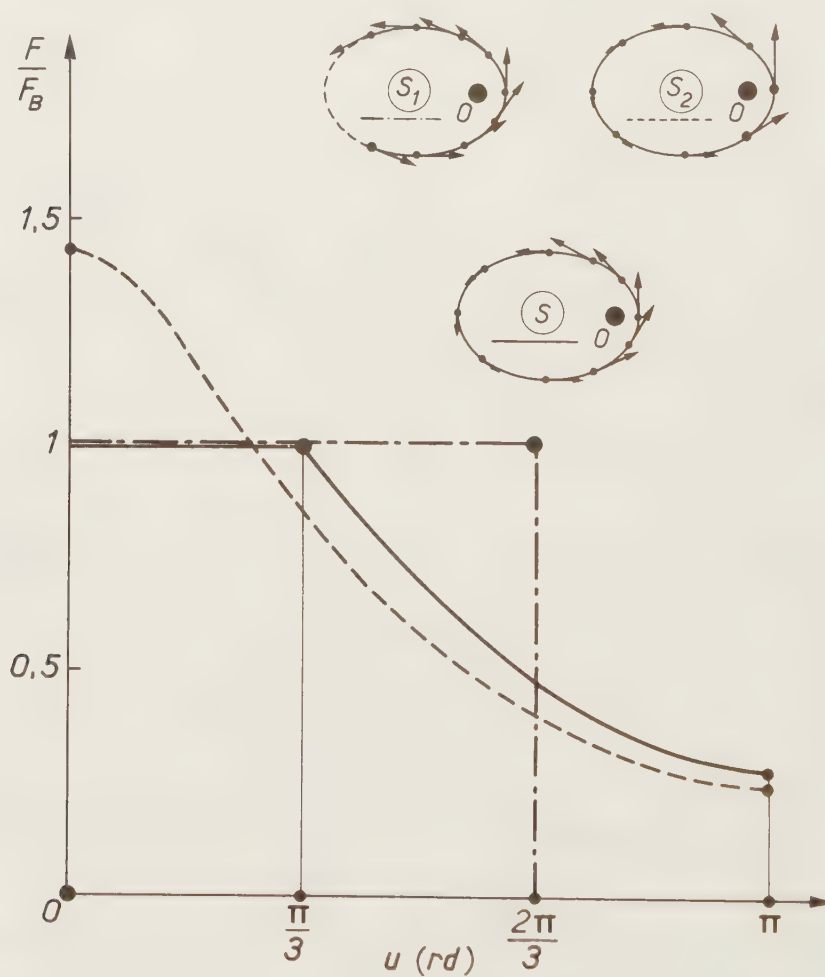


Fig. 9 - Comparaison des lois de poussée des systèmes de propulsion.

$$\left(e = \frac{1}{\sqrt{2}} ; f = 0,1 , |\lambda| = 1,19 \right)$$

II,1.3.2. CAS CIRCULAIRE ($e=0$) - ANGLE DE TRANSFERT QUELCONQUE.

On prend la bissectrice de l'angle de transfert comme axe de référence $\vec{Ox}$ ($L_0 = -\Delta L/2$; $L_f = +\Delta L/2$).

II,1.3.2.1. SYSTÈME (S_2).

La poussée est tangentielle et constante et égale à

$$(12) \quad F = \frac{|\Delta a|}{2 \Delta L}$$

d'autant plus faible que ΔL est plus grand.

II,1.3.2.2. SYSTÈME (S_7).

Si $F_{max} < \frac{|\Delta a|}{2 \Delta L}$ le transfert est impossible.

Si $F_{max} = \frac{\Delta a}{2 \Delta L}$, le transfert consiste à pousser toujours tangentiellement avec la poussée maximale.

Si $F_{max} > \frac{|\Delta a|}{2 \Delta L}$ la solution dégénère (cas singulier de type I bis). La loi de poussée

relative à une solution dégénérée quelconque s'obtient en répartissant la "masse" fictive $|\Delta a|/2$ sur l'arc de transfert $\overline{M_0 M_f}$ avec la "densité linéaire" $F(L)$ [$0 \leq F(L) \leq F_{max}$]. La poussée est tangentielle, vers l'avant si $\Delta a > 0$, l'arrière si $\Delta a < 0$, et de module $F(L)$.

Cette forte dégénérescence permettra de choisir, parmi les répartitions possibles, celles qui assureront des variations données de certains paramètres de l'orbite autres que a (voir § II,3.3.2.5.).

II,1.4. CONCLUSION.

Ce premier cas particulier, très simple, a pu être étudié dans des hypothèses assez peu restrictives et même pour le système de propulsion (S).

Les autres cas où une seule variation est imposée sont plus délicats mais pourraient être abordés de la même façon.

II,2. ROTATION INFINITÉSIMALE OPTIMALE DU PLAN DE L'ORBITE

II,2.1. INTRODUCTION.

Il s'agit de réaliser la rotation optimale $\vec{\Delta j}$ du plan de l'orbite ($\mathcal{O}$) autour d'un axe contenu dans son plan, les variations induites éventuelles des autres éléments étant considérées comme indifférentes (fig. 1).

Les seules composantes non nécessairement nulles de l'adjoint cinématique $\mathcal{P}$ sont p_{ξ} et p_{η} .

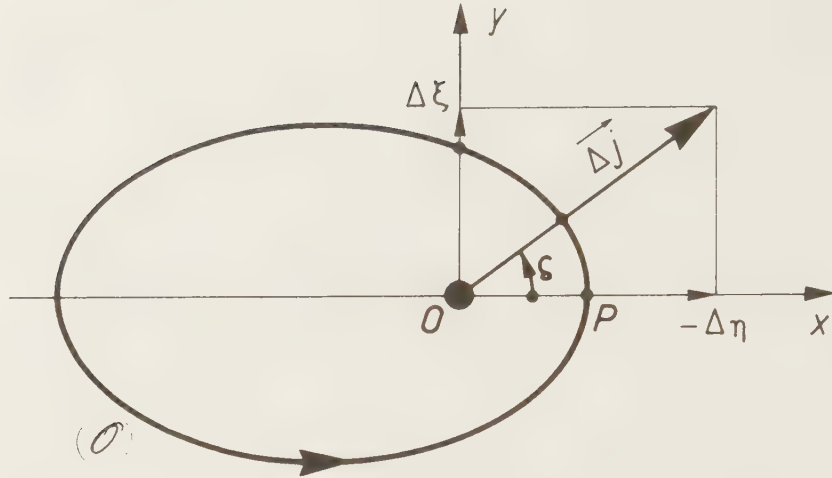


Fig. 1 - Rotation infinitésimale du plan de l'orbite.

Nous avons déjà obtenu au chapitre I,4. les résultats suivants :

il n'y a pas de variation induite des autres éléments et pour le système de propulsion (S_2) , il y a découplage entre le problème de la rotation optimale du plan d'orbite et le problème des modifications de l'orbite dans son plan, c'est-à-dire que la solution optimale que nous allons trouver concernant la seule rotation du plan pourra être superposée à la solution optimale concernant les modifications de l'orbite dans son plan, si ces dernières sont également imposées.

II,2.2. POUSSÉE OPTIMALE.

L'équation (I,3 - 41) s'écrit ici :

$$(1) \quad \vec{p}_V = \frac{\vec{p}_z}{h} \wedge \vec{r} = \frac{p_z y - p_y x}{h} \vec{z} \quad (h = \sqrt{1 - e^2})$$

et montre que le vecteur efficacité $\vec{p}_V$ (donnant la direction optimale $\vec{D}$ de la poussée) est normal au plan de l'orbite. Il est nul lorsque $\vec{r}$ est colinéaire à $\vec{p}_z$.

Pour une condition de normalisation de l'adjoint telle que $|\vec{p}_V| \ll 1$, l'orbite directrice $(O_{\mathcal{P}})$ a pour éléments (équation I,3, 47 - 49)

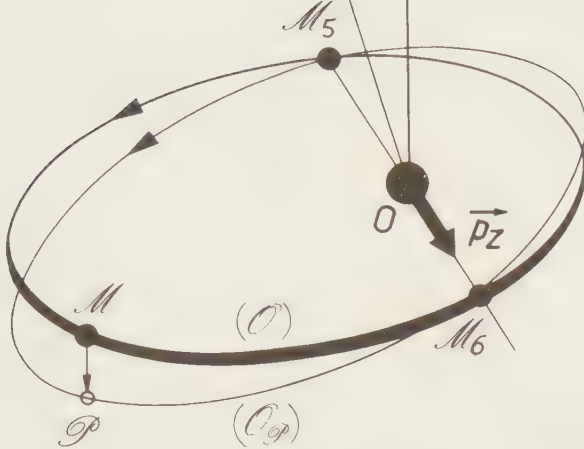
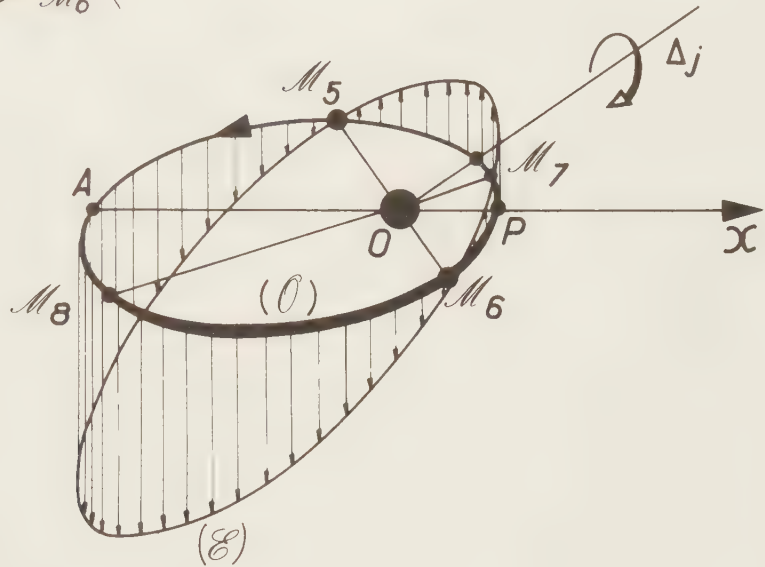
$$(2) \quad \begin{cases} \vec{h}_{\mathcal{P}} = \vec{h} + \vec{D}h = \vec{h} + \frac{\vec{p}_z}{h} \wedge \vec{z} \\ \vec{e}_{\mathcal{P}} = \vec{e} + \vec{D}e = \vec{e} + \frac{\vec{p}_z}{h} \wedge \vec{e} \\ a_{\mathcal{P}} = a \end{cases}$$

Le plan de cette ellipse $(O_{\mathcal{P}})$ se déduit du plan de l'ellipse (O) par la rotation infinitésimale $\vec{p}_z/h$ (fig. 2).

Dans ce problème particulier de la rotation optimale du plan de l'orbite, le lieu de l'extrémité $\mathcal{P}$



Fig. 2 - Orbite directrice.

Fig. 3 - Accélération optimale (système S_2).

du vecteur $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{p_v}$ dans l'espace absolu $Oxyz$ est encore une ellipse, même si la condition de normalisation de l'adjoint n'est plus telle que $|\overrightarrow{p_v}|$ soit $\ll 1$. Cette ellipse ($\mathcal{E}$) est l'intersection du cylindre droit elliptique de génératrices parallèles à $\overrightarrow{Oz}$ s'appuyant sur ($\mathcal{O}$) et du plan :

$$(3) \quad z = \frac{yp_{\xi} - xp_{\eta}}{h} \quad (\text{fig. 3}).$$

II,2.2.1. SYSTÈME DE PROPULSION (S_2).

L'accélération de poussée optimale $\vec{\gamma} = \overrightarrow{p_v}$ est alternativement orientée vers le haut ($z > 0$) sur un demi-tour, puis vers le bas ($z < 0$) sur un demi-tour (fig. 3). γ est maximum absolu à l'extrémité, la plus éloignée de 0, du diamètre conjugué $M_x M_y$ de $M_5 M_6$ par rapport à ($\mathcal{O}$), et maximum relatif à l'autre extrémité.

II,2.2.2. SYSTÈME DE PROPULSION (S_1) .

Les points de commutation M_1, M_2, M_3, M_4 s'obtiennent en coupant l'ellipse $(\mathcal{E})$ par les plans $z = \pm 1$ ($|\vec{p}_V| = 1$). Il y a donc, au maximum, par révolution, un ou deux arcs à poussée maximale (fig. 4).

Lorsqu'il y a deux arcs de poussée, les cordes des arcs de poussée sont parallèles et équidistantes de 0. ($OH' = OH''$ sur la figure 5).

Il est commode, dans le cas du système de propulsion (S_1) , de définir la solution non plus par les paramètres p_ξ et p_η mais par les paramètres α et S indiqués sur la figure 5, faisant intervenir le cercle principal (C) de l'orbite $(\mathcal{O})$ et tels que :

$$(4) \quad \begin{cases} \cos \alpha = -sp_\eta / h \\ \sin \alpha = sp_\xi \end{cases}$$

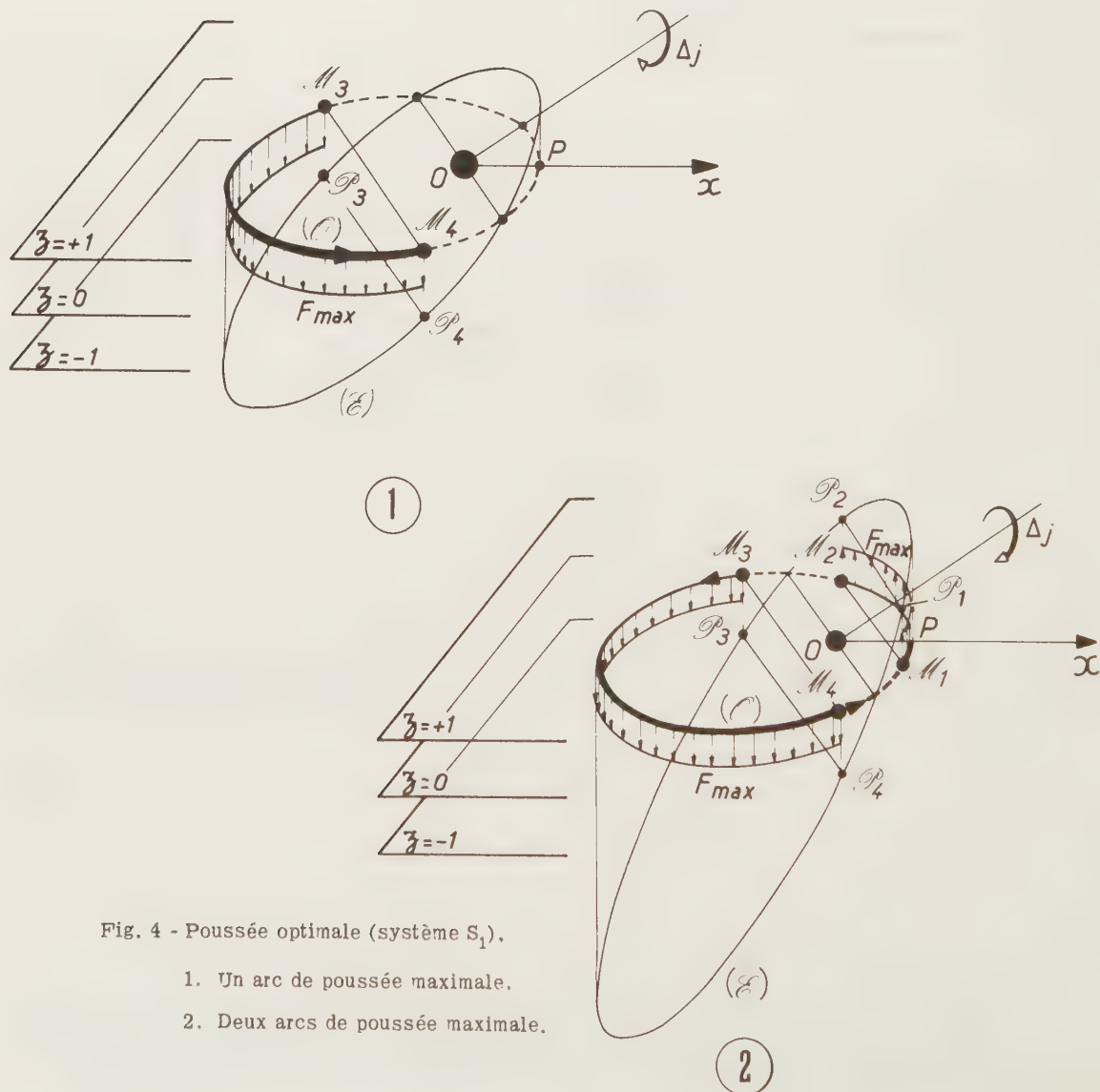


Fig. 4 - Poussée optimale (système S_1).

1. Un arc de poussée maximale.
2. Deux arcs de poussée maximale.

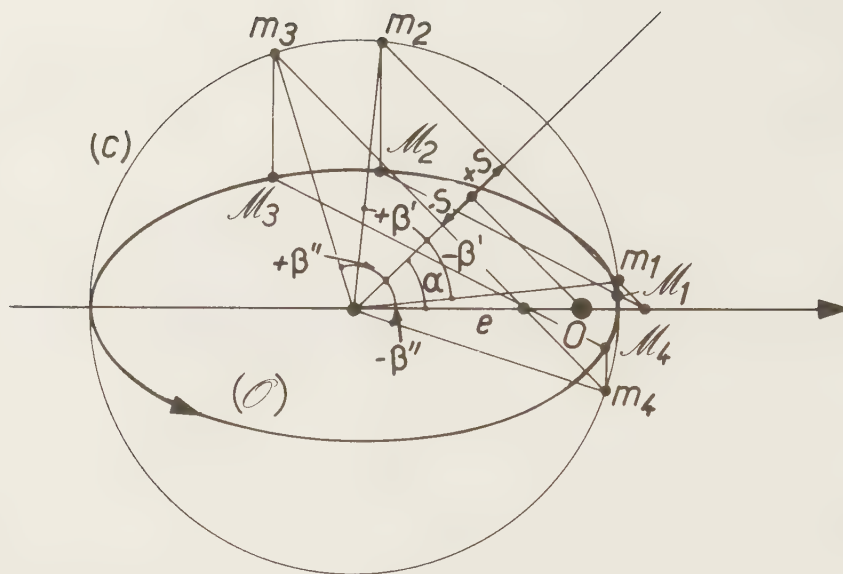


Fig. 6 - Définition des paramètres β' et β'' .

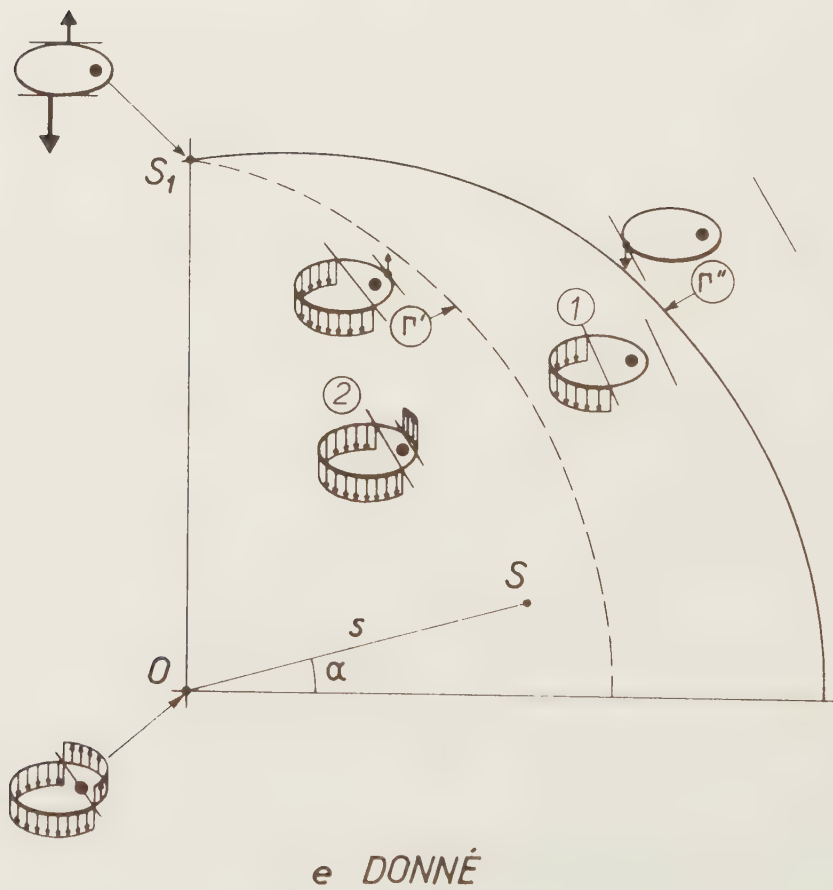


Fig. 7 - Abaque en coordonnées polaires α, s . ($e = 0,2$)

Le point O correspond à l'application continue de la poussée et le point S_1 ($\alpha = \frac{\pi}{2}$, $s = 1$) aux solutions bi-impulsionnelles (deux impulsions de sens contraires aux sommets B et B' du petit axe) qui seront étudiées en détail plus loin.

Dans le plan (S) , les lignes $u = C^{te}$ sont des cercles passant par O et tangents à (P') ou (P'') , d'équation polaire :

$$(9) \quad \pm s = D(u) \cos [\alpha - W(u)]$$

avec

$$\begin{cases} \cos W(u) = \frac{\cos u - e}{D} \\ \sin W(u) = \frac{\sin u}{D} \end{cases}$$

$$D(u) = (1 - 2e \cos u + e^2)^{1/2}$$

ce qui permet d'obtenir immédiatement la position des points de commutation lorsque α et s sont connus.

II,2.3. ROTATION OPTIMALE. CONSOMMATION.

II,2.3.1. CAS PARTICULIER DE LA ROTATION OPTIMALE D'UNE ORBITE QUASI-CIRCULAIRE ($e \ll 1$) POUR UN ANGLE DE TRANSFERT ΔL QUELCONQUE.

$\vec{Ox}$ est pris suivant l'axe de symétrie de l'arc de transfert $\widehat{M_o M_f}$.

II,2.3.1.1. SYSTÈME DE PROPULSION (S_2) .

Nous avons vu au § I,4.1.3. qu'il y a découplage entre la rotation $\Delta \eta$ autour de $\vec{Ox}$ et la rotation $\Delta \xi$ autour de $\vec{Oy}$. L'étude de la rotation $\Delta \eta$ seule (fig. 8) puis la rotation $\Delta \xi$ seule (fig. 9) suffit à résoudre le problème.

La rotation réduite est respectivement, dans ces deux cas :

$$(10) \quad |\zeta_\eta| = \frac{\Delta \eta}{\sqrt{2 P_{max} |\Delta m| \Delta L}} = \sqrt{\langle G_{\eta\eta} \rangle}$$

et

$$(11) \quad |\zeta_\xi| = \frac{|\Delta \xi|}{\sqrt{2 P_{max} |\Delta m| \Delta L}} = \sqrt{\langle G_{\xi\xi} \rangle}$$

où

$$(12) \quad \langle G_{\eta\eta} \rangle = \frac{G_{\eta\eta}}{\Delta L} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin \Delta L}{\Delta L} \right)$$

$$(13) \quad \langle G_{\xi\xi} \rangle = \frac{G_{\xi\xi}}{\Delta L} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin \Delta L}{\Delta L} \right)$$

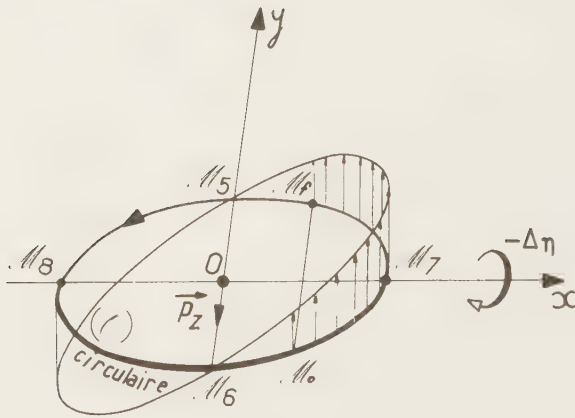


Fig. 8 - Rotation autour de l'axe de symétrie de l'arc de transfert ($e = 0$, système S_2)

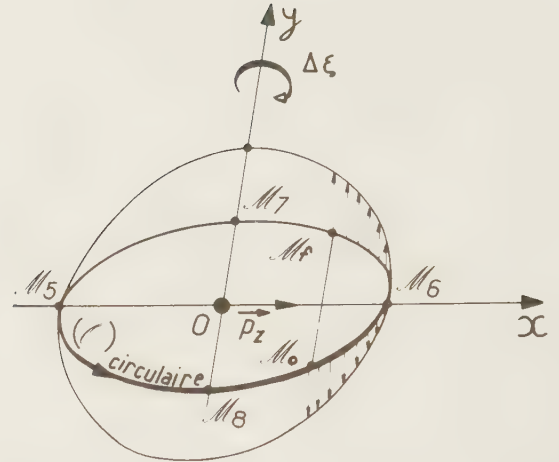


Fig. 9 - Rotation autour de la perpendiculaire à l'axe de symétrie de l'arc de transfert ($e = 0$, système S_2)

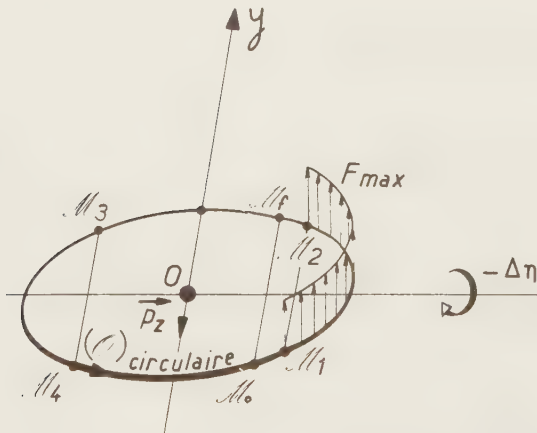


Fig. 10 - Rotation autour de l'axe de symétrie de l'arc de transfert ($e = 0$, système S_1)

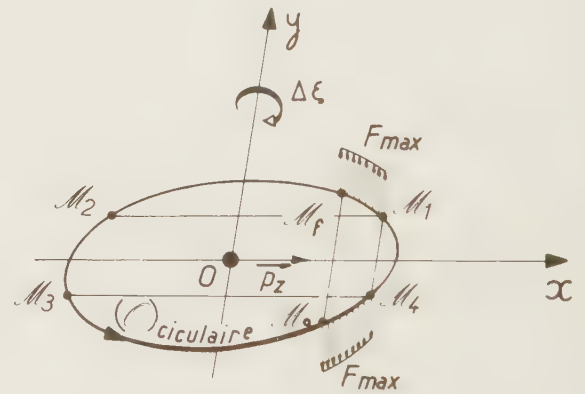


Fig. 11 - Rotation autour de la perpendiculaire à l'axe de symétrie de l'arc de transfert ($e = 0$, système S_1)

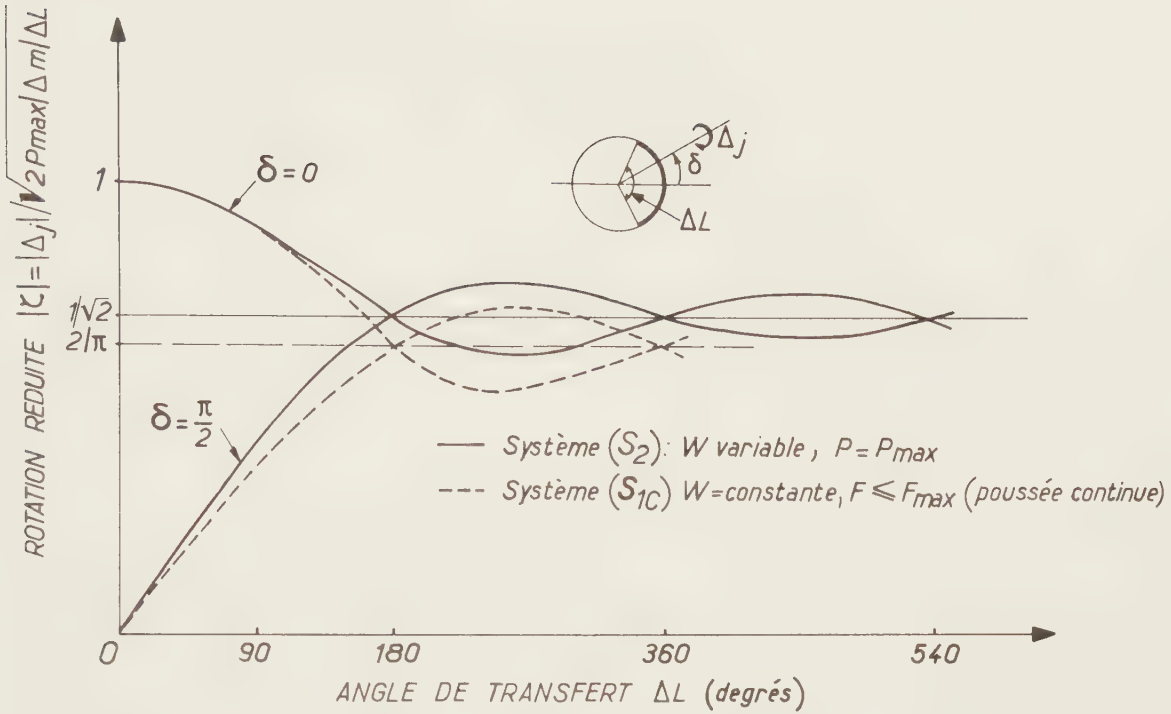
Les rotations réduites $|\zeta_\eta|$ et $|\zeta_\xi|$ sont égales à $1/\sqrt{2}$ pour $\Delta L = 2N\pi$ (fig. 12) et, après quelques oscillations tendent vers cette valeur lorsque $\Delta L \rightarrow \infty$, conformément aux résultats obtenus au § I,4.1.2.

Mais on peut noter que ces quantités prennent également la valeur $1/\sqrt{2}$ pour $\Delta L = (2k+1)\pi$ car les arcs de poussée $M_6 \otimes M_7 \otimes M_5$ et $M_5 \otimes M_8 \otimes M_6$ (fig. 8) ou $M_8 \otimes M_6 \otimes M_7$ et $M_7 \otimes M_5 \otimes M_8$ (fig. 9) ont des effets équivalents.

La rotation $|\Delta \xi|$ autour de $\vec{Oy}$ est beaucoup plus coûteuse que la rotation $|\Delta \eta|$ autour de $\vec{Ox}$ pour ΔL faible.

II,2.3.1.2. SYSTÈME DE PROPULSION (S_1).

Nous avons vu au § I,4.2.3. que lorsque la rotation $-\Delta \eta$ autour de $\vec{Ox}$ (ou $\Delta \xi$ autour de $\vec{Ox}$) est seule imposée elle n'induit pas de rotation $\Delta \xi$ autour de $\vec{Oy}$ (ou $-\Delta \eta$ autour de $\vec{Ox}$). Mais, il n'y a pas découplage entre ces deux rotations : l'étude successive de ces deux rotations ne suffit

Fig. 12 - Performances comparées des systèmes de propulsion ($e = 0$)

pas pour résoudre le problème par addition des solutions. Cependant, nous nous bornerons à ces deux cas simples, pour comparer les résultats obtenus avec ceux relatifs au système de propulsion (S_2).

ROTATION - $\Delta\eta$ SEULE IMPOSÉE (FIG. 10).

Dans ce cas $p_f = 0$.

La rotation est donnée par :

$$(14) \quad \lambda_\eta(\Delta L, L_2) = \frac{\Delta\eta}{F_{max} \Delta L} = \frac{(\text{signe } p_\eta)}{\Delta L} \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{F_{max}} |\cos L| dL =$$

$$\frac{(\text{signe } p_\eta)}{\Delta L} \begin{cases} 2 \sin \bar{L} + 4N \sin L_2 & \text{pour } 2N\pi \leq \Delta L \leq 2L_2 + 2N\pi \\ 2 \sin L_2 + 4N \sin L_2 & \text{pour } 2L_2 + 2N\pi \leq \Delta L \leq 2(\pi - L_2) + 2N\pi \\ 4 \sin L_2 - 2 \sin \bar{L} + 4N \sin L_2 & \text{pour } 2(\pi - L_2) + 2N\pi \leq \Delta L \leq 2(N+1)\pi \end{cases}$$

avec $0 \leq \bar{L} = \frac{\Delta L}{2} - N\pi \leq \pi$

N est le nombre de tours complets.

La consommation est donnée par :

$$(15) \quad \lambda_c(\Delta L, L_2) = \frac{\Delta C}{F_{max} \Delta L} = \frac{W/\Delta m}{F_{max} \Delta L} = \frac{1}{\Delta L} \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{F_{max}} dL =$$

$$\frac{1}{\Delta L} \begin{cases} 2\bar{L} + 4NL_2 & \text{pour } 2N\pi \leq \Delta L \leq 2L_2 + 2N\pi \\ 2L_2 + 4NL_2 & \text{pour } 2L_2 + 2N\pi \leq \Delta L \leq 2(\pi - L_2) + 2N\pi \\ 2\bar{L} + 4L_2 - 2\pi + 4NL_2 & \text{pour } 2(\pi - L_2) + 2N\pi \leq \Delta L \leq 2(N+1)\pi \end{cases}$$

D'où la rotation réduite :

$$(16) \quad |\zeta_\eta| = \sqrt{\lambda_\eta \nu_\eta} = \frac{|\lambda_\eta|}{\sqrt{\lambda_c}} = |\zeta_\eta(\Delta L, L_2)|.$$

Si p_{max} est fixé, maximiser $|\zeta_\eta|$ par rapport à L_2 (pour ΔL et $\Delta\eta$ fixés) revient à chercher la vitesse d'éjection (constante) optimale W^* [utilisation du système de propulsion (S_1^*)].

Nous n'effectuerons pas ce calcul et nous nous bornerons à envisager le cas de la poussée continue ($L_2 = \pi/2$) [utilisation du système de propulsion (S_{1c})].

Alors : $\lambda_c = 1$ et

$$(17) \quad |\zeta_\eta|_c = |\lambda_\eta| = \frac{1}{\Delta L} \begin{cases} 2 \sin \bar{L} + 4N & \text{si } 2N\pi \leq \Delta L \leq (2N+1)\pi \\ 4 - 2 \sin \bar{L} + 4N & \text{si } (2N+1)\pi \leq \Delta L \leq 2(N+1)\pi \end{cases}$$

L'évolution de ce paramètre est tracée sur la figure 12 afin de montrer la pénalisation due à la non-modulation de la vitesse d'éjection W . Après quelques oscillations $|\zeta_\eta|$ tend vers $2/\pi$ (au lieu de $1/\sqrt{2}$ pour une vitesse d'éjection modulée) valeur qu'il prend d'ailleurs encore pour $\Delta L = k\pi$. La pénalisation est négligeable pour $\Delta L \ll \pi$, mais atteint

$$\frac{\Delta|\zeta|}{|\zeta|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\pi}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \simeq 0,10$$

soit environ 20% sur la consommation de masse $|\Delta m|$, pour $\Delta L = \begin{cases} k\pi \\ \infty \end{cases}$

ROTATION $\Delta\xi$ SEULE IMPOSÉE (FIG. 11).

Dans ce cas, $p_\eta = 0$. Nous n'indiquerons que les résultats :

$$(18) \quad \lambda_\xi(\Delta L, L_1) = \frac{\Delta\xi}{F_{max} \Delta L} = \frac{(\text{signe } p_\xi)}{\Delta L} \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{F_{max}} |\sin L| dL =$$

$$\frac{(\text{signe } p_\xi)}{\Delta L} \begin{cases} 4N \cos L_1, & \text{pour } 2N\pi \leq \Delta L \leq 2L_1 + 2N\pi \\ 2 \cos L_1 - 2 \cos \bar{L} + 4N \cos L_1, & \text{pour } 2L_1 + 2N\pi \leq \Delta L \leq 2(\pi - L_1) + 2N\pi \\ 4(N+1) \cos L_1, & \text{pour } 2(\pi - L_1) + 2N\pi \leq \Delta L \leq 2(N+1)\pi \end{cases}$$

$$(19) \quad \lambda_c(\Delta L, L_1) = \frac{\Delta C}{F_{max} \Delta L} = \frac{W|\Delta m|}{F_{max} \Delta L} = \frac{1}{\Delta L} \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{F_{max}} dL =$$

$$\frac{1}{\Delta L} \begin{cases} 2N(\pi - 2L_1) & \text{pour } 2N\pi \leq \Delta L \leq 2L_1 + 2N\pi \\ 2\bar{L} - 2L_1 + 2N(\pi - 2L_1) & \text{pour } 2L_1 + 2N\pi \leq \Delta L \leq 2(\pi - L_1) + 2N\pi \\ 2(N+1)(\pi - 2L_1) & \text{pour } 2(\pi - L_1) + 2N\pi \leq \Delta L \leq 2(N+1)\pi \end{cases}$$

D'où la rotation réduite :

$$(20) \quad |\zeta_{\mathcal{F}}| = \sqrt{\lambda_{\mathcal{F}} \nu_{\mathcal{F}}} = \frac{|\lambda_{\mathcal{F}}|}{\sqrt{\lambda_c}} = |\zeta_{\mathcal{F}}(\Delta L, L_1)|$$

et, dans le cas de la poussée continue ($L_1 = 0$),

$$(21) \quad |\zeta_{\mathcal{F}}|_c = |\lambda_{\mathcal{F}}| = \frac{1}{\Delta L} (2 - 2 \cos \bar{L} + 4N).$$

La figure 12 montre que la rotation $|\Delta \mathcal{F}|$ est évidemment beaucoup plus coûteuse que la rotation $|\Delta \eta|$ pour $\Delta L \ll \pi$. Par contre, pour $\Delta L = \begin{cases} K\pi \\ \infty \end{cases}$, les deux rotations ont des coûts égaux ($|\zeta| = \frac{2}{\pi}$).

La pénalisation due à la non-modulation de la vitesse d'éjection W n'est pas négligeable pour $\Delta L \ll \pi$

En effet :

$$|\zeta_{\mathcal{F}}|_{(S_2)} = \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin \Delta L}{\Delta L} \right) \right]^{\frac{4}{2}} \sim \frac{\Delta L}{2\sqrt{3}}$$

$$|\zeta_{\mathcal{F}}|_{(S_{1c})} = \frac{1}{\Delta L} \left(2 - 2 \cos \frac{\Delta L}{2} \right) \sim \frac{\Delta L}{4}$$

d'où la pénalisation :

$$\frac{\Delta |\zeta|}{|\zeta|} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,134$$

soit près de 27% sur la consommation de masse.

Par contre, pour $\Delta L = \begin{cases} K\pi \\ \infty \end{cases}$, on retrouve la pénalisation de 10% sur $|\zeta|$, donc environ 20% sur $|\Delta m|$.

II,2.3.2. CAS PARTICULIER D'UN NOMBRE ENTIER DE RÉVOLUTIONS ($\Delta L = 2N\pi$).

II,2.3.2.1. SYSTÈME DE PROPULSION (S_2).

Le problème a été résolu au § I,4.1.2. Il y a *découplage* entre la rotation $-\Delta \eta$ autour de $\vec{Ox}$ et la rotation $\Delta \mathcal{F}$ autour de $\vec{Oy}$. L'étude de la rotation $-\Delta \eta$ seule, puis de la rotation $\Delta \mathcal{F}$ seule suffit à résoudre le problème.

Les rotations réduites correspondantes sont [voir équation (I,4 - 3)] :

$$(22) \quad |\zeta_\eta| = \frac{|\Delta\eta|}{\sqrt{2P_{max} |\Delta m| \Delta u}} = \sqrt{\langle G_{\eta\eta} \rangle} = \sqrt{\frac{1+4e^2}{2(1-e^2)}}$$

$$(23) \quad |\zeta_\xi| = \frac{|\Delta\xi|}{\sqrt{2P_{max} |\Delta m| \Delta u}} = \sqrt{\langle G_{\xi\xi} \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{indépendant de } e)$$

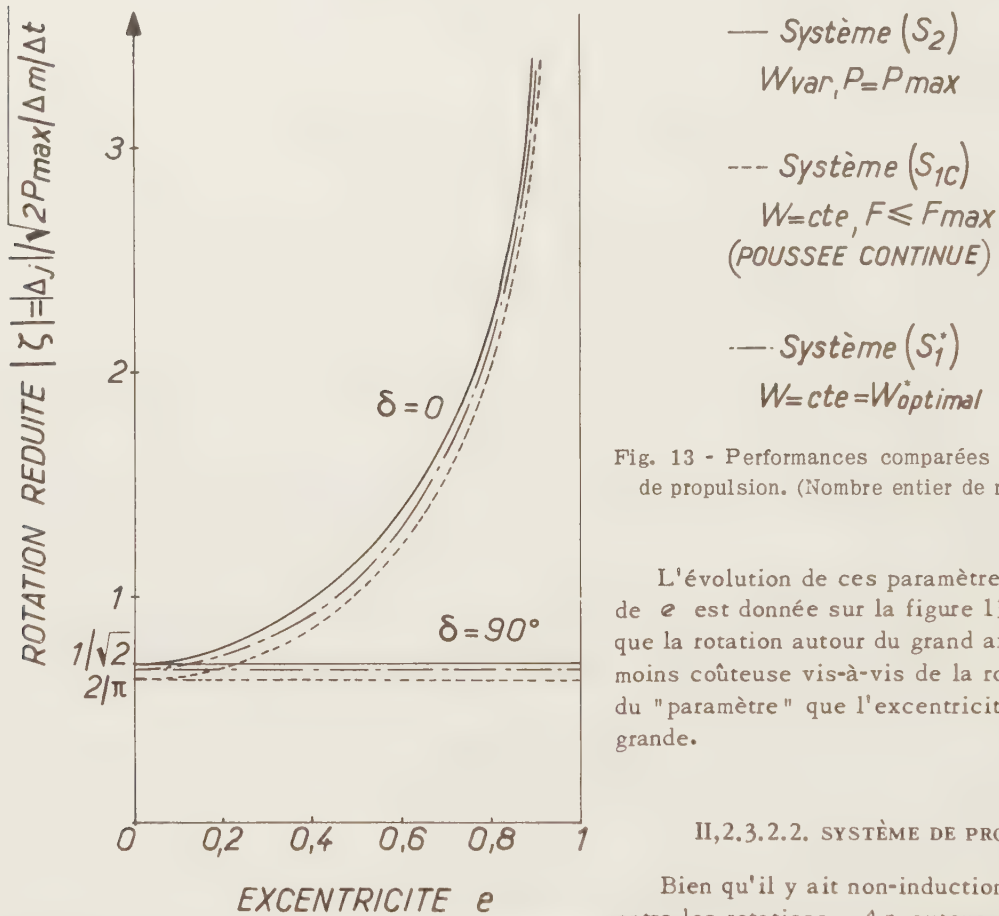


Fig. 13 - Performances comparées des systèmes de propulsion. (Nombre entier de révolutions)

L'évolution de ces paramètres en fonction de e est donnée sur la figure 13. On notera que la rotation autour du grand axe est d'autant moins coûteuse vis-à-vis de la rotation autour du "paramètre" que l'excentricité est plus grande.

II,2.3.2.2. SYSTÈME DE PROPULSION (S_1).

Bien qu'il y ait non-induction mutuelle entre les rotations $-\Delta\eta$ autour de $\vec{Ox}$ et $\Delta\xi$ autour de $\vec{Oy}$, il n'y a pas découplage (addition des solutions), si bien que l'étude du cas général (angle δ quelconque) est nécessaire.

L'intégration des équations du mouvement sur N tours conduit à :

$$(24) \quad \lambda_\eta = \frac{\Delta\eta}{2N\pi F_{max}} = -\frac{1}{2\pi h} \int_0^{2\pi} \frac{\pm F}{F_{max}} (\cos u - e)(1 - e \cos u) du =$$

$$\frac{1}{2\pi h} \left[-3e(\beta' + \beta'' - \pi) + 2(1+e^2) \cos \alpha (\sin \beta' + \sin \beta'') - \frac{e}{2} \cos 2\alpha (\sin 2\beta' + \sin 2\beta'') \right]$$

$$(h = \sqrt{1-e^2})$$

$$(25) \quad \lambda_{\xi} = \frac{\Delta \xi}{2N\pi F_{max}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pm F}{F_{max}} \sin u (1 - e \cos u) du =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left[2 \sin \alpha (\sin \beta' + \sin \beta'') - \frac{e}{2} \sin 2\alpha (\sin 2\beta' + \sin 2\beta'') \right]$$

$$(26) \quad \lambda_c = \frac{\Delta c}{2N\pi F_{max}} = \frac{W/\Delta m}{2N\pi F_{max}} = \frac{1}{2\pi} \left[2(\beta' + \pi - \beta'') - 2e \cos \alpha (\sin \beta' - \sin \beta'') \right]$$

où β' et β'' sont donnés en (7) en fonction de α et s .

λ_{η} , λ_{ξ} et λ_c ne dépendent donc que des deux paramètres α et s c'est-à-dire des coordonnées polaires du point S dans le plan (S) . Il est entendu que dans la zone (1) il faut prendre $\beta' = 0$ dans les expressions.

L'inversion des deux premières équations (calcul de α et s en fonction de $\Delta \eta$ et $\Delta \xi$ afin de porter ces valeurs dans la troisième équation pour obtenir une formule explicite donnant la consommation en fonction de la rotation désirée) n'est possible que dans certains cas particuliers. Mais ces formules se prêtent bien à une résolution numérique par approximations successives.

Cette résolution est facilitée par l'utilisation d'abaques tracés pour des valeurs constantes de l'excentricité e , dans le plan (S) , et fournissant une première approximation par interpolation.

Les figures 14, 15, 16 présentent de tels abaques respectivement tracés pour $e = 0; 0,2$ et $0,8$.

Seules les lignes $\delta = \text{Arc tg } \left| \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \right| = \text{Cte}$, $|\lambda| = \frac{|\Delta j|}{2N\pi F_{max}} = \sqrt{\lambda_{\xi}^2 + \lambda_{\eta}^2} = \text{Cte}$, caractérisant la rotation, et $|\nu| = \frac{|\lambda|}{\lambda_c} = \frac{|\Delta j|}{\Delta c} = \frac{|\Delta j|}{W/\Delta m} = \text{Cte}$ (rotation spécifique), ont été représentées.

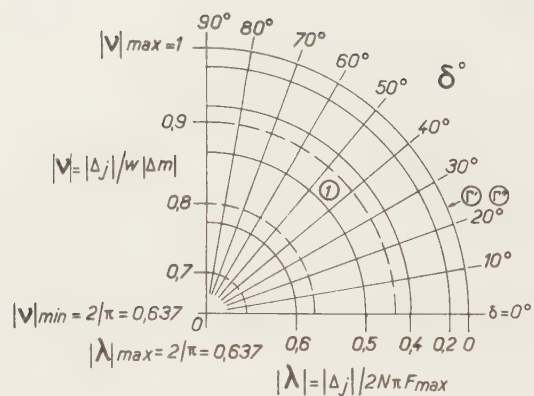
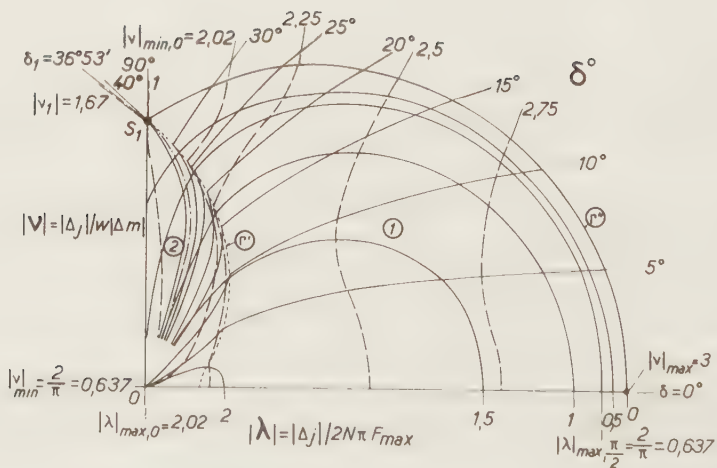
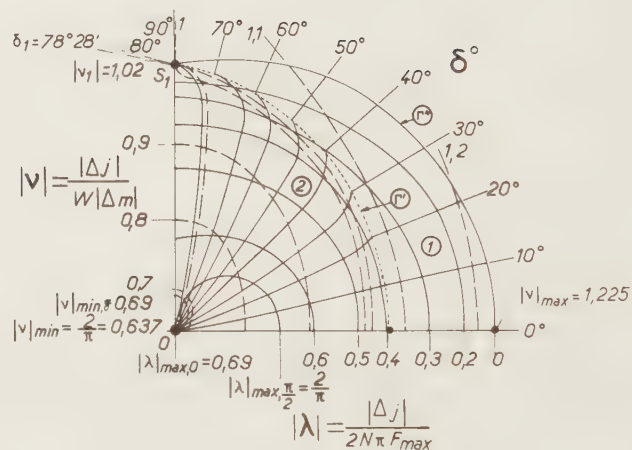
Connaissant la rotation $(\delta, \Delta j)$ à effectuer, le nombre de tours N , la poussée maximale disponible F_{max} , il est possible de placer le point $S(\delta, |\lambda|)$ sur l'abaque, ce qui fournit $|\nu|$, (donc la consommation $|\Delta m|$ si on connaît la vitesse d'éjection W) ainsi que α et s (c'est-à-dire finalement la configuration des arcs de poussée).

Les lignes $\delta = \text{Cte}$ correspondant à des valeurs de δ supérieures à $\delta_1(e) = \text{Arc cos } e$ sont situées entièrement dans la zone (2). Les rotations autour d'axes trop éloignés du grand axe nécessitent donc obligatoirement deux arcs de poussée par révolution, quelle que soit la valeur du paramètre $|\lambda|$.

Ce résultat peut être interprété simplement dans le cas des solutions bi-impulsionnelles correspondant au point S_1 de l'abaque en faisant appel à la notion de "domaine de manœuvrabilité" de CONTENSOU [4] (fig. 17) :

une impulsion $d\vec{c}$ appliquée au point $\mathcal{M}$, perpendiculairement au plan de l'orbite, produit une rotation $d\vec{j}$ de l'orbite, autour de $\vec{OM}$, proportionnelle à $\vec{OM}$.

Cette rotation peut donc être représentée par le vecteur $\vec{OM}$, si l'impulsion est appliquée vers le haut ($z > 0$), ou le vecteur $\vec{OM}$, opposé à $\vec{OM}$, si elle est appliquée vers le bas ($z < 0$).

Fig. 14 - Abaque $e = 0$.Fig. 15 - Abaque $e = 0,2$.Fig. 16 - Abaque $e = 0,8$.

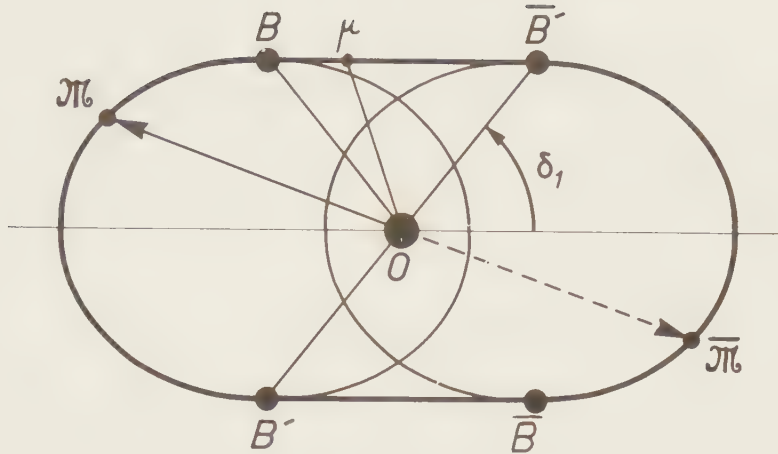


Fig. 17 - Domaine de manoeuvrabilité.

Avec la même impulsion totale dC , il est possible de réaliser toute rotation dont l'image se trouve à l'intérieur du plus petit contour convexe entourant les ellipses lieux de $\mathcal{M}$ et $\overline{\mathcal{M}}$. Il suffit, en effet, de décomposer l'impulsion dC en deux ou plusieurs impulsions appliquées en des points différents de l'orbite.

L'impulsion totale dC étant donnée, les rotations *maximales* qu'il est possible d'obtenir correspondent à des images sur le contour du domaine de manoeuvrabilité ainsi défini.

Si l'axe de rotation est éloigné du grand axe, ($\delta > \delta_1 = \text{Arc cos } e$), l'image μ se trouve, par exemple, sur le segment $\overline{BB'}$. La rotation $\overrightarrow{O\mu}$ doit alors être décomposée en deux rotations, en général inégales, respectivement autour de $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$ obtenues en appliquant successivement, à chaque révolution, deux impulsions inégales et de sens contraires aux sommets B et B' du petit axe de l'orbite (O).

Les solutions impulsioneilles correspondant à la frontière (Γ'') (mono-impulsions) et au point S_7 (bi-impulsions) sont telles que le paramètre $|\lambda|$ soit nul. On les obtient donc lorsque la poussée maximale dont on dispose (rapportée à la force d'attraction à la distance a) est très grande vis-à-vis de la rotation $|\Delta j|$ à effectuer par révolution.

N et F_{max} étant donnés, une faible rotation, correspondant à une valeur de $|\lambda|$ telle que $0 \leq |\lambda| \leq |\lambda|_{max}$, $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$, peut être effectuée autour de n'importe quel axe.

Une rotation importante, correspondant à $|\lambda|_{max}$, $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \leq |\lambda| \leq |\lambda|_{max,0}$, ne peut pas être effectuée autour d'axes trop voisins du "paramètre" ($\delta < \delta_{lim}(|\lambda|)$ donné en Annexe 10).

La rotation maximale qu'il est possible d'obtenir $\left[|\lambda|_{max,0} = \frac{3e}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta_1}{\pi} \right) + \frac{2+e^2}{\pi} \right]$ est une rotation autour du grand axe ($\delta = 0$) obtenue en appliquant la poussée de façon continue.

La rotation spécifique maximale $|\nu|_{max} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ est obtenue dans le cas d'une rotation autour du grand axe ($\delta = 0$) à l'aide d'une impulsion à l'apogée par révolution ($|\lambda| = 0$).

La rotation spécifique diminue lorsqu'on passe des solutions impulsioneilles aux solutions où la poussée est appliquée de façon continue. En effet, les arcs de poussée sont de plus en plus étalés et la poussée est appliquée en des zones où l'efficacité $|\rho_V|$ est faible.

La rotation spécifique minimale $|\nu|_{\min, \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$ est obtenue pour une rotation autour du paramètre ($\delta = \frac{\pi}{2}$) dans le cas de la poussée continue.

Les lignes $|\nu| = C^{\text{te}}$ correspondant à $1 < |\nu| < |\nu_1| = \frac{1}{\sin \delta_1} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ sont entièrement situées dans la zone (2) (deux arcs de poussée). Les valeurs de $|\nu|$ comprises entre 1 et $|\nu_1|$ correspondent donc, entre autres, aux rotations spécifiques relatives aux solutions bi-impulsionnelles (point S_1).

CAS PARTICULIERS.

a) *Poussée continue* (point 0 de l'abaque).

Pour $s = 0$, $\beta' = \beta'' = \beta = \text{Arc cos}(e \cos \alpha)$

$$(27) \quad |\lambda_\eta| = \frac{1}{2\pi h} \left[-3e(2\beta - \pi) + 4(1+e^2) \cos \alpha \sin \beta - e \cos 2\alpha \sin 2\beta \right]$$

$$(28) \quad |\lambda_\xi| = \frac{1}{2\pi} (4 \sin \alpha \sin \beta - e \sin 2\alpha \sin 2\beta)$$

$$(29) \quad |\lambda_c| = 1$$

d'où les valeurs de δ et de $|\nu| = |\lambda|$ données dans l'Annexe 10.

En particulier, pour $\alpha = 0$, $\beta_0 = \text{Arc cos } e = \delta_1$ (évident sur la figure 6) et :

$$(30) \quad |\lambda|_{\max, 0} = |\nu|_{\min, 0} = |\lambda_{\eta_0}| = \frac{3e}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta_1}{\pi} \right) + \frac{2+e^2}{\pi}.$$

b) *Solutions mono-impulsionnelles et quasi-mono-impulsionnelles.*

Ces solutions correspondent aux points S de l'abaque respectivement sur la frontière (Γ'') et au voisinage de cette frontière.

Faisant $\beta'' = \pi - \varepsilon$ ($\varepsilon \ll \pi$) dans les équations (24) (25) (26) on tire :

$$(31) \quad |\nu| = \frac{|\Delta j|}{W|\Delta m|} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos \delta} \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \frac{(1-e \cos \delta)^5}{(1-e^2)^4} \lambda^2 + \text{ordre } |\lambda|^3 \right) =$$

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos \delta} \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \frac{(1-e \cos \delta)^3}{(1-e^2)^3} \lambda_c^2 + \text{ordre } \lambda_c^3 \right).$$

Cette formule donne *directement* la rotation spécifique $|\nu|$ en fonction des paramètres $|\lambda|$ et δ c'est-à-dire en fonction de δ , $|\Delta j|$, N et $F_{\max}$.

Considérant la solution mono-impulsionnelle ($\lambda = 0$) de la figure 17, on retrouve bien :

$$(32) \quad |\nu|_{\text{imp.}} = \frac{|\Delta j|}{\Delta C} = \frac{0 \mathcal{M}}{h} = \frac{r}{h} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos \delta}$$

maximale pour $\delta = 0$:

$$(33) \quad |\nu|_{\text{imp., max.}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

L'étalement de l'arc de poussée autour du point d'impulsion provoque une *perte* relative égale à

$$\frac{\pi^2}{6} \frac{(1 - e \cos \delta)^3}{(1 - e^2)^3} \lambda_c^2 \text{ où } \lambda_c = \frac{\Delta t \text{ propulsion sur un arc}}{T(\text{période})}.$$

Cette perte est *maximale* pour $\cos \delta = \cos \delta_1 = e$ et est égale à $\frac{\pi^2}{6} \left(\frac{\Delta t_{prop}}{T} \right)^2$ quel que soit e , en accord avec les résultats figurant dans [26].

c) *Solutions bi-impulsionnelles* (point S_1).

Considérant la solution bi-impulsionnelle de la figure 17, on a directement :

$$(34) \quad |v|_{bi-imp.} = \frac{|\Delta j|}{\Delta C} = \frac{0\mu}{h} = \frac{b}{h \sin \delta} = \frac{1}{\sin \delta}.$$

d) *Orbite elliptique de faible excentricité* ($\varepsilon \ll e \ll 1$).

Ce cas est très important dans la pratique.

Un développement limité suivant les puissances croissantes de l'excentricité e , explicité en Annexe 11, conduit à :

Zone (1) : 1 arc de poussée par révolution :

$$(35) \quad z = \frac{\pi |\lambda|}{2} \ll \sqrt{e \cos \delta} + \text{ordre } e^{3/2}$$

$$(36) \quad |v| = \frac{|\Delta j|}{W|\Delta m|} = 1 + e \cos \delta - \frac{\pi^2 \lambda^2}{6} + \text{ordre } e^2.$$

Zone (2) : 2 arcs de poussée par révolution :

$$(37) \quad z = \frac{\pi |\lambda|}{2} > \sqrt{e \cos \delta} + \text{ordre } e^{3/2}$$

$$(38) \quad |v| = \frac{|\Delta j|}{W|\Delta m|} = \frac{z}{\text{Arc sin } z} + \frac{1 + 3z^2}{2(\text{Arc sin } z)^2 \sqrt{1 - z^2}} e^2 \cos^2 \delta + \text{ordre } e^4.$$

Dans le cas particulier du cercle, l'expression de la rotation spécifique est très simple :

$$(39) \quad |v|_{e=0} = \frac{\frac{\pi}{2} |\lambda|}{\text{Arc sin} \left(\frac{\pi}{2} |\lambda| \right)}.$$

Il y a toujours dans ce cas deux arcs de poussée par révolution symétriques par rapport à 0.

II,2.3.2.3. COMPARAISON ENTRE LES SYSTÈMES DE PROPULSION (S_1) ET (S_2).

La comparaison ne sera faite que pour la rotation autour du grand axe $\vec{\partial x}$ ($\delta = 0$) et la rotation autour du "paramètre" $\vec{\partial y}$ ($\delta = \frac{\pi}{2}$).

Sur la figure 13 on a porté la rotation réduite $|v| = \frac{|\Delta j|}{\sqrt{2} P_{max} |\Delta m| \Delta t}$ en fonction de e dans les deux cas suivants :

a) *Poussée continue* [Système de propulsion (S_{1c})]

$$|v|_{\delta=0} = |\lambda|_{max,0} = \frac{3e}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{Arc cos } e}{\pi} \right) + \frac{2+e^2}{\pi}$$

$$|\zeta|_{\delta=\frac{\pi}{2}} = |\lambda|_{\max, \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \quad (\text{indépendant de } e).$$

Comme dans le cas du système (S_2) , la rotation autour du grand axe est d'autant moins coûteuse vis-à-vis de la rotation autour du "paramètre" que l'excentricité est plus grande.

Pour $\delta = \frac{\pi}{2}$, la pénalisation due à la non-modulation de la vitesse d'éjection est constante quel que soit e et égale à la valeur déjà obtenue dans le cas circulaire :

$$\frac{\Delta |\zeta|}{|\zeta|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\pi}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \simeq 0,10 \text{ soit } 10\% \text{ sur la consommation de masse.}$$

b) Vitesse d'éjection optimale W^* [Système (S_1^*)]

Pour $\delta = 0 (\rightarrow \alpha = 0)$ et $\delta = \frac{\pi}{2} (\rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2})$, $|\lambda|$ et $|\nu|$ ne sont fonction que de s . Pour le choix $W = W^*$, $|\zeta| = \sqrt{\lambda \nu}$ est maximal par rapport à s .

Traisons d'abord le cas $\delta = \frac{\pi}{2}$. Alors :

$$|\lambda| = \frac{2}{\pi} \sin \beta, \quad \lambda_c = \frac{2}{\pi} \beta$$

avec

$$\beta = \text{Arc cos } s \text{ (indépendant de } e \text{)}$$

donc :

$$|\zeta^*| = \max_{\beta} \frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda_c}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \max_{\beta} \frac{\sin \beta}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \beta^*}{\sqrt{\beta^*}}$$

où β^* est la racine comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ de l'équation transcendante :

$$(40) \quad \frac{\pi}{2} \text{tg } \beta = 2\beta.$$

Une valeur approchée de β^* est $\beta^* = 66,75^\circ$ ce qui donne $|\zeta^*| \simeq 0,68$.

Dans le cas $\delta = 0$, il faut rechercher sur chaque abaque, correspondant à une valeur de e , le point fournissant $|\zeta|_{\max}$. Le résultat est porté sur la figure 13. La pénalisation due à la non-modulation de la vitesse d'éjection est plus faible que dans le cas de la poussée continue.

Dans le cas circulaire, cette pénalisation est égale à :

$$\frac{\Delta |\zeta|}{|\zeta|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 0,68}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0,038$$

soit environ 3% seulement sur la consommation de masse au lieu de 20%.

Dans ce cas circulaire la valeur β^* se trouve aisément en appliquant la condition (I,3 - 80) : l'aire (1) de la surface cylindrique entre le niveau de commutation $Z = +1$ et l'ellipse $(\mathcal{E})$ doit être égale à l'aire (2) (fig. 18). Soit :

$$\int_0^{\beta^*} \cos L \, dL = 2\beta^* \cos \beta^*$$

ou encore

$$\sin \beta^* = 2\beta^* \cos \beta^*$$

qui est la condition obtenue en (40).

II,3. TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES CIRCULAIRES COPLANAIRES PROCHES

II,3.1. INTRODUCTION.

Il s'agit de réaliser, pour un angle de transfert ΔL donné (fig. 1), la dilatation relative optimale $\Delta a/a$ du rayon d'une orbite circulaire.

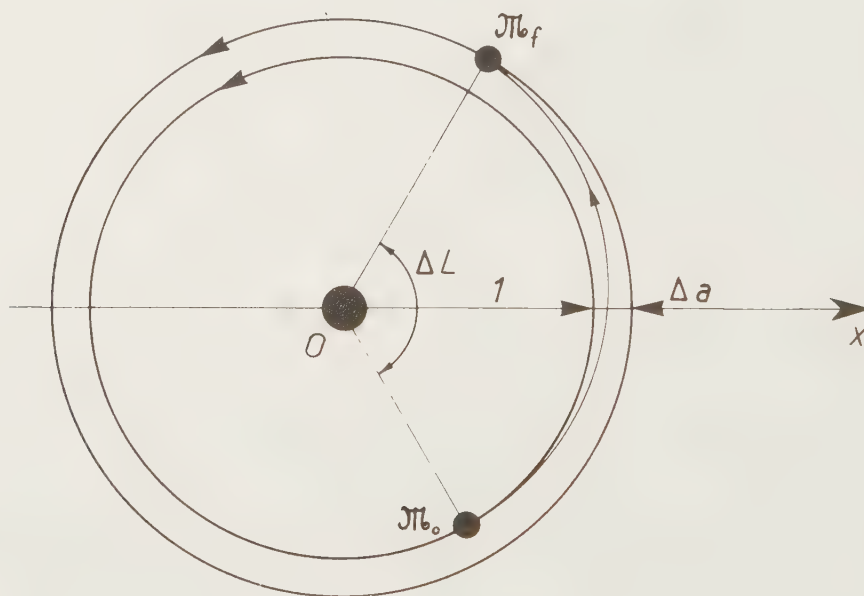


Fig. 1 - Transfert entre cercles proches.

On suppose qu'il n'y a pas rendez-vous.

Dans le cas du système de propulsion (S_2) à vitesse d'éjection W variable et à puissance limitée, le problème a été résolu analytiquement par GOBETZ [38] sans utiliser les éléments orbitaux comme coordonnées d'état.

Il a été repris par l'auteur [45] en utilisant cette fois les éléments orbitaux, puis étendu dans les mêmes conditions par GOBETZ au cas du rendez-vous [39].

Dans le cas du système de propulsion (S_1) à vitesse d'éjection W constante et à poussée limitée ($F \leq F_{max}$), le problème a été résolu, par une méthode analytico-numérique par Mc INTYRE et CROCCO [41 - 44] et par HINZ [52] (ce dernier n'ayant traité que le cas de la poussée constante continue) sans utiliser les éléments orbitaux.

L'introduction des éléments orbitaux dans la présente étude amène quelques simplifications et permet notamment d'obtenir une formule explicite approchée donnant la consommation dans la plupart des cas [45].

Les seules composantes de l'adjoint cinématique P non nécessairement nulles sont : p_a , p_α et p_β .

Nous poserons :

$$(1) \quad \begin{cases} p_\alpha = p_a \cos L_e \\ p_\beta = p_e \sin L_e \end{cases}$$

L'origine des arcs sera prise au milieu de l'arc de transfert $\widehat{M_o M_f}$:

$$(2) \quad \begin{cases} L_o = -\frac{\Delta L}{2} \\ L_f = +\frac{\Delta L}{2} \end{cases}$$

II,3.2. POUSSÉE OPTIMALE.

II,3.2.1. COURBE D'EFFICACITÉ.

Nous avons déjà vu au § I,3.2.4. que la courbe d'efficacité $(\mathcal{P})$ est une *ellipse* (fig. 2) :

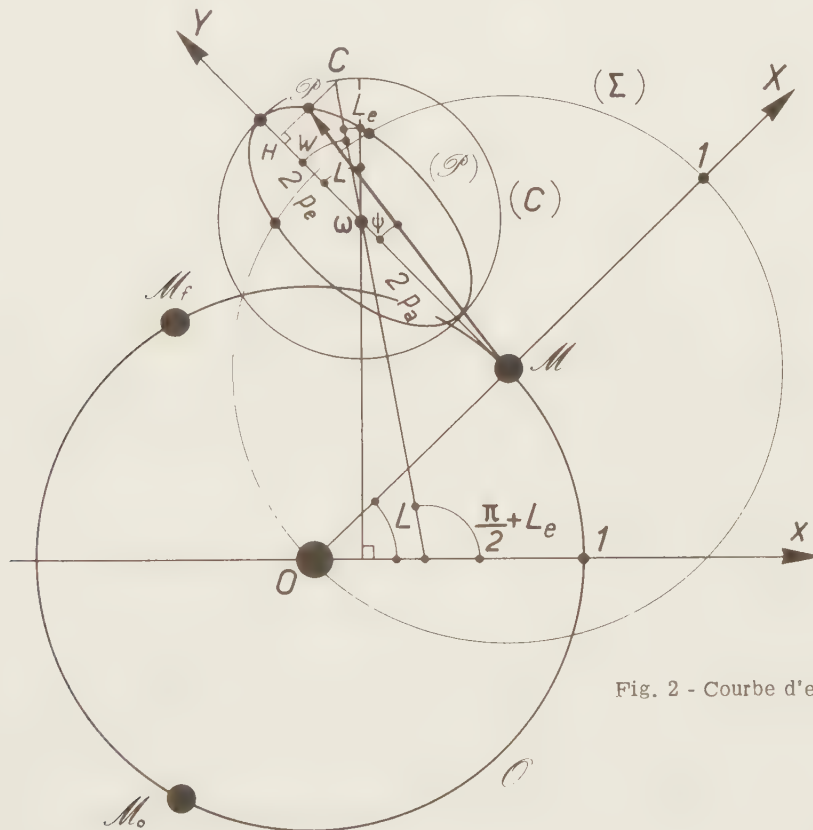


Fig. 2 - Courbe d'efficacité.

$$(3) \quad \vec{p}_v \begin{cases} X = p_e \sin (L - L_e) \\ Y = 2 p_a + 2 p_e \cos (L - L_e) \end{cases}$$

se déduisant du cercle (C) de centre ω ($X = 0$, $Y = 2 p_a$) et de rayon $2 p_e$ par l'affinité orthogonale d'axe $\vec{M\omega}$ et de rapport $1/2$.

$$P^T = \begin{vmatrix} p_a \\ p_\alpha \\ p_\beta \end{vmatrix} = \langle G \rangle^{-1} \frac{\Delta \mathcal{H}}{\Delta L} = \begin{vmatrix} \langle G_{aa} \rangle \langle G_{a\alpha} \rangle > 0 \\ \langle G_{a\alpha} \rangle \langle G_{\alpha\alpha} \rangle > 0 \\ 0 & 0 < G_{\beta\beta} \rangle \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\Delta a}{\Delta L} \\ \frac{\Delta \alpha}{\Delta L} \\ \frac{\Delta \beta}{\Delta L} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\langle G_{\alpha\alpha} \rangle \langle G_{a\alpha} \rangle}{\delta} - \frac{\langle G_{a\alpha} \rangle}{\delta} & 0 \\ -\frac{\langle G_{a\alpha} \rangle \langle G_{a\alpha} \rangle}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\langle G_{\beta\beta} \rangle} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\Delta a}{\Delta L} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

avec :

$$\delta = \langle G_{aa} \rangle \langle G_{\alpha\alpha} \rangle - \langle G_{a\alpha} \rangle^2 \gg 0$$

d'où :

$$(9) \quad \begin{cases} p_a = \frac{\langle G_{\alpha\alpha} \rangle}{\delta} \frac{\Delta a}{\Delta L} \quad (\langle G_{\alpha\alpha} \rangle > 0) \\ p_\alpha = -\frac{\langle G_{a\alpha} \rangle}{\delta} \frac{\Delta a}{\Delta L} \quad (= \varepsilon_e p_e) \\ p_\beta = 0 \Rightarrow L_e = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \text{ soit } \varepsilon_e = \cos L_e = \pm 1 \end{cases}$$

et, en particulier,

$$(10) \quad q = \frac{p_a}{p_e} = -\varepsilon_e \frac{\langle G_{\alpha\alpha} \rangle}{\langle G_{a\alpha} \rangle} = -\varepsilon_e \frac{5+3 \frac{\sin \Delta L}{\Delta L}}{8 \frac{\sin(\Delta L/2)}{\Delta L/2}}$$

Il suffit d'étudier les cas où $L_e = 0$ et $\varepsilon_e = +1$. Alors : $\Delta a \geq 0$ selon que $\langle G_{a\alpha} \rangle \leq 0$ soit :

$$\begin{cases} (4k+2)\pi < \Delta L < 4(k+1)\pi \\ 4k\pi < \Delta L < (4k+2)\pi \end{cases}$$

Changer p_α en $-p_\alpha$ c'est-à-dire ε_e en $-\varepsilon_e$ change q en $-q$ (voir 10) c'est-à-dire p_a en $-p_a$. La poussée est inversée et Δa est changé en $-\Delta a$.

Donc si, pour l'angle de transfert ΔL donné, le signe de Δa obtenu avec l'hypothèse $\varepsilon_e = +1$ ne convient pas, il suffit d'inverser la poussée.

L'équation (10) montre que la loi d'orientation optimale de la poussée n'est fonction que de l'angle de transfert.

Lorsque ΔL croît à partir de $\Delta L = 0$, q part de la valeur $q = -1$ et reste légèrement supérieur à -1 pour $0 < \Delta L < \overline{\Delta L} \simeq \pi$ (fig. 5). La valeur $\overline{\Delta L}$ est la racine > 0 , non nulle, de l'équation transcendante :

$$(11) \quad 5 + 3 \frac{\sin \Delta L}{\Delta L} = 8 \frac{\sin(\Delta L/2)}{\Delta L/2}.$$

Une racine approchée est : $\overline{\Delta L} = 187^\circ$.

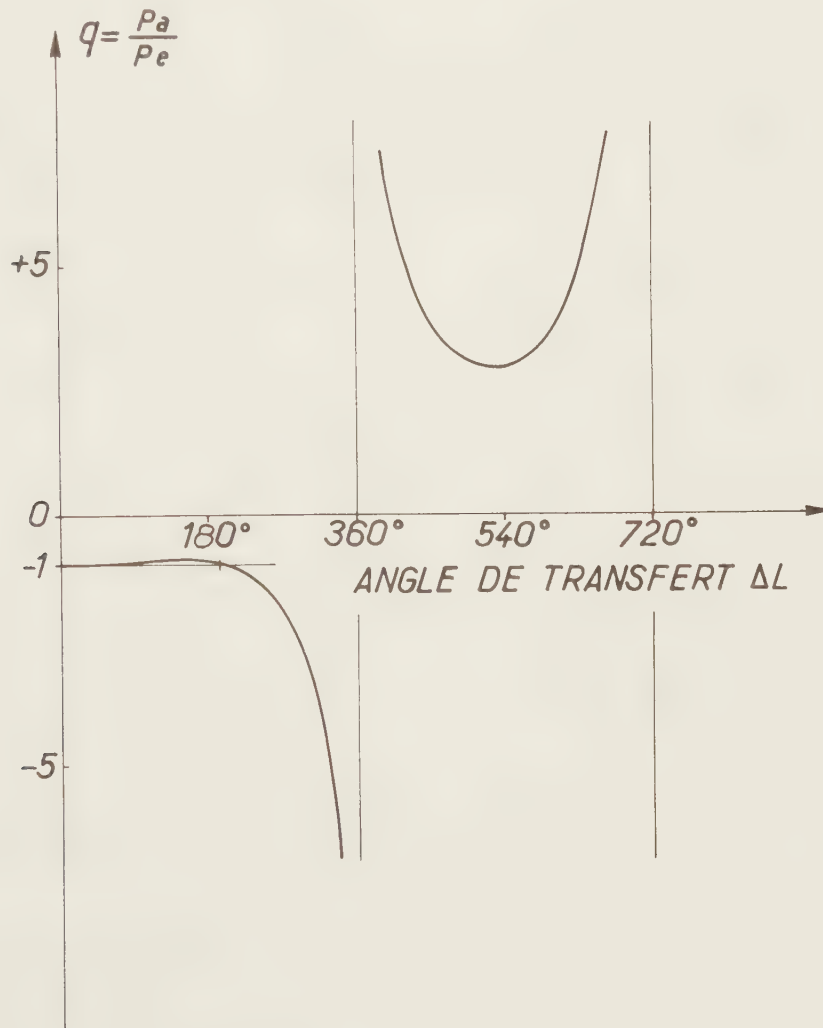


Fig. 5 - Evolution du paramètre q définissant la loi optimale d'orientation de la poussée. (système S_2).

Donc, pour $0 < \Delta L < \overline{\Delta L}$, le point D est légèrement à l'intérieur de l'ellipse $(\mathcal{E})$ (fig. 6). La poussée optimale correspondante est tracée sur cette figure. On a effectué l'inversion de la poussée afin d'avoir $\Delta \vartheta > 0$ (*). On retrouve l'aspect des lois optimales de poussée obtenues par les méthodes numériques, comme en [34] et [35]. Il est important de noter le renversement de la poussée tangentielle dans la zone centrale de l'arc $\overline{M_0 M_f}$.

L'étendue 2β de la zone de renversement pour $\Delta L \ll \pi$ est :

$$(12) \quad 2\beta \sim \frac{\Delta L}{\sqrt{6}}.$$

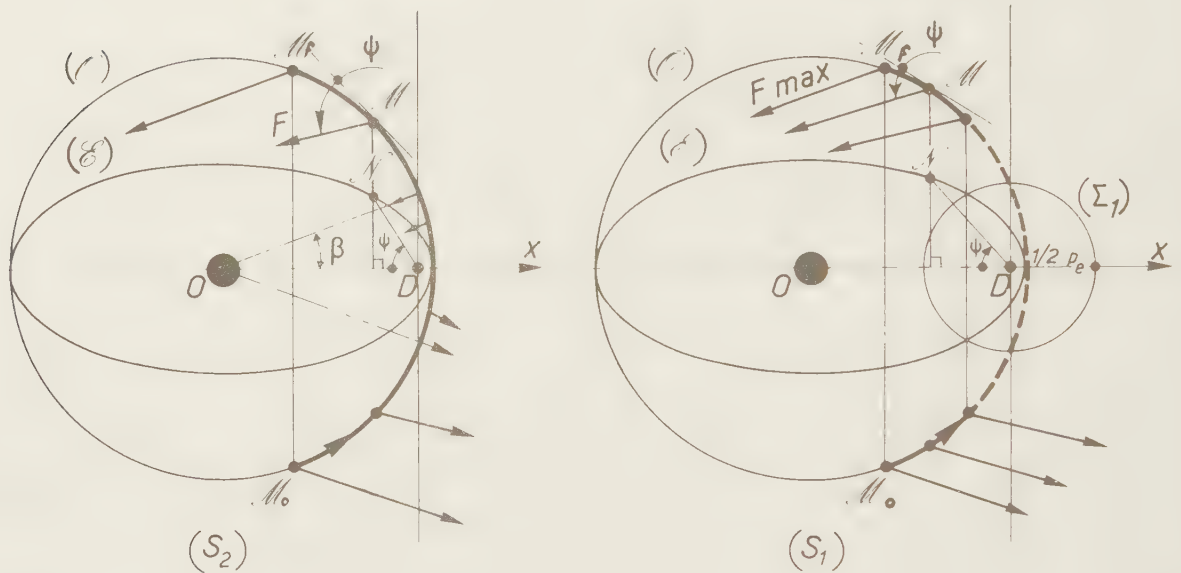


Fig. 6 - Loi de poussée optimale. (Angle de transfert faible).

Lorsque $\Delta L > \overline{\Delta L}$, $|q|$ est > 1 . Le point est extérieur à l'ellipse $(\mathcal{E})$ (fig. 7). Il n'y a plus de zone de renversement de la poussée tangentielle.

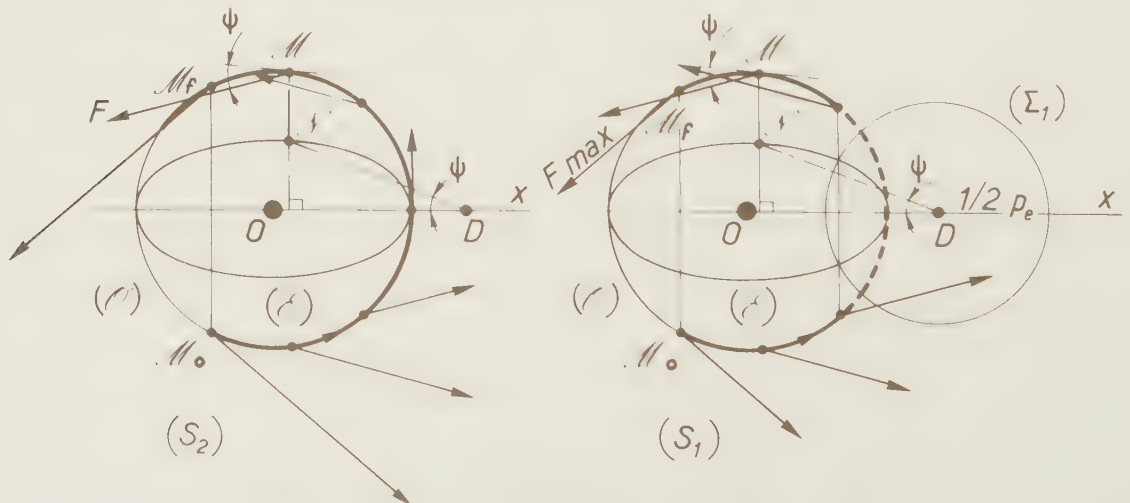


Fig. 7 - Loi de poussée optimale. (Angle de transfert important).

(*) Si bien que $\psi = (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DN})$ et non pas $(\overrightarrow{Dx}, \overrightarrow{DN})$.

Lorsque $\Delta L = 2N\pi$ (ou $\Delta L \gg 2\pi$), $p_e = 0$. La courbe d'efficacité se réduit à un point ω . L'angle φ est toujours nul. La poussée est constante et tangentielle.

CONSUMMATION.

La dilatation réduite est donnée par l'équation (I,3 - 73) :

$$(13) \quad |\zeta| = \frac{|\Delta a|}{\sqrt{2 P_{max}} |\Delta m| \Delta L} = \left(\frac{\delta}{\langle G_{\alpha\alpha} \rangle} \right)^{1/2} = 2 \left[\frac{\delta \left(\frac{\sin \frac{\Delta L}{2}}{2} \right)^2}{5 + 3 \frac{\sin \Delta L}{\Delta L}} \right]^{1/2}$$

On a tracé sur la figure 8 les variations de cette "dilatation réduite" $|\zeta|$ en fonction de l'angle de transfert ΔL . Lorsque ΔL croît à partir de $\Delta L = 0$, la dilatation spécifique part de la valeur zéro et après quelques oscillations se stabilise à la valeur deux, valeur qu'elle atteint du reste, sans la dépasser, pour $\Delta L = 2N\pi$ (nombre entier de révolutions).

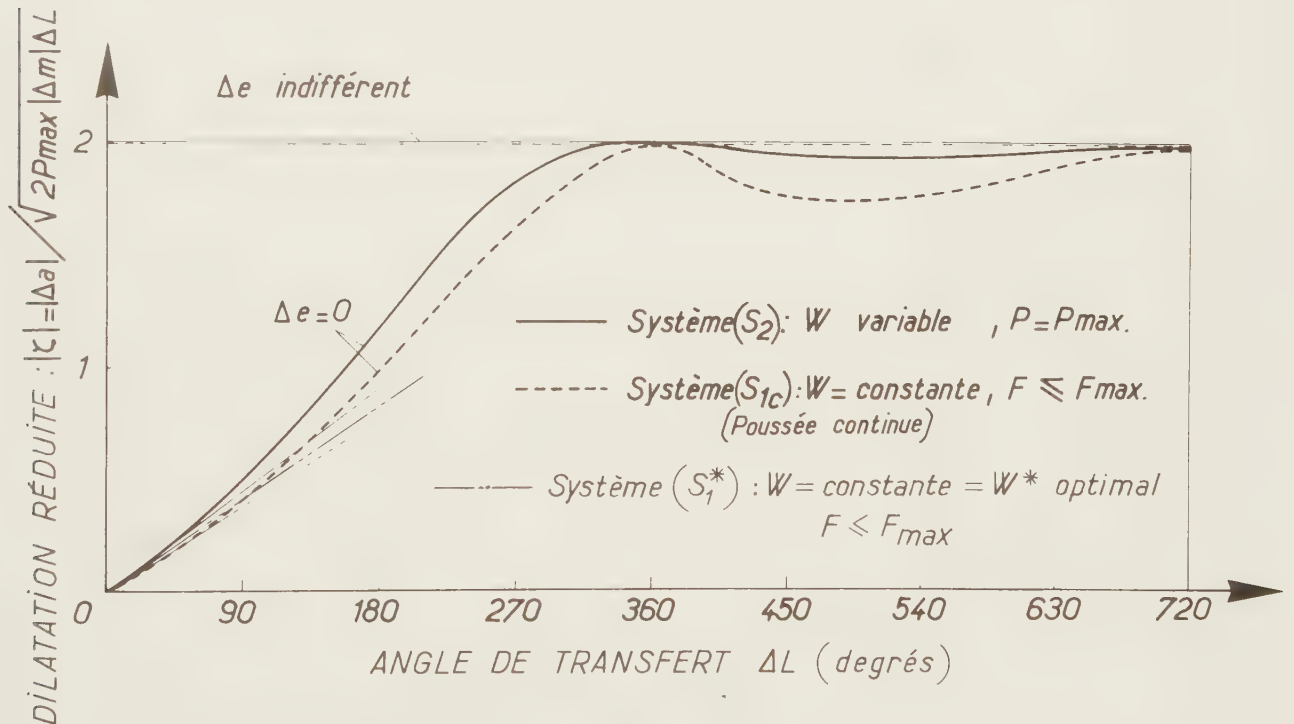


Fig. 8 - Performances comparées des systèmes de propulsion.

Si au lieu d'imposer $\Delta e = 0$, la variation de e est indifférente, la "dilatation réduite" est :

$$|\zeta| = \frac{|\Delta a|}{\sqrt{2 P_{max}} |\Delta m| \Delta L} = \sqrt{\langle G_{aa} \rangle} = 2 \quad (\text{indépendante de } \Delta L)$$

La poussée est tangentielle et constante.

La figure 8 montre clairement la pénalisation qu'entraîne la condition $\Delta e = 0$, en particulier lorsque l'angle de transfert est faible. La pénalisation est nulle pour $\Delta L = \begin{cases} 2N\pi \\ \infty \end{cases}$

En effet, on a vu au § I,4.1.2. qu'il y a alors découplage entre les variations de a et de e .

CAS OÙ L'ANGLE DE TRANSFERT EST FAIBLE ($\Delta L \approx 0$).

La partie principale de $|\xi|$, calculée à partir de (13) est :

$$(14) \quad |\xi| \sim \frac{\Delta L}{2\sqrt{3}}$$

ce qui fournit la tangente à l'origine de la courbe tracée sur la figure 8.

Ce résultat peut être retrouvé très simplement : lorsque l'angle de transfert est très faible, l'accélération de poussée nécessaire pour réaliser le transfert est très grande vis-à-vis de l'accélération de la pesanteur. Tout se passe comme si on opérait en l'absence de forces de gravitation. Il est alors aisé de démontrer que pour parcourir la longueur $|\Delta a|$ dans le temps ΔL , avec une vitesse nulle au départ et à l'arrivée, la manière la plus économique est d'utiliser une loi de variation de l'accélération *linéaire* en L (fig. 9).

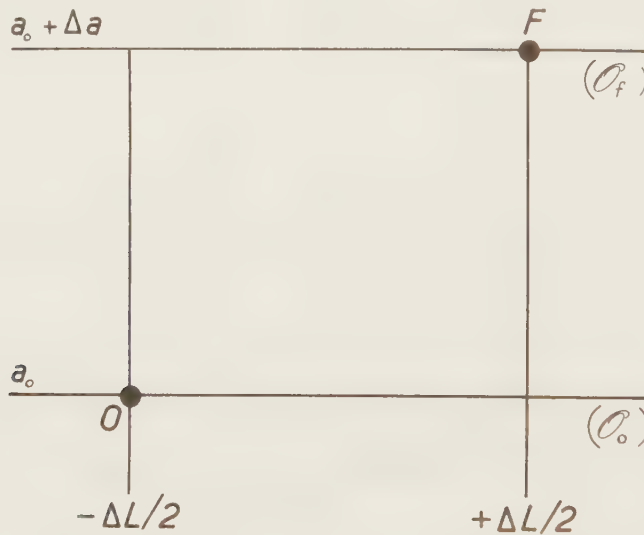
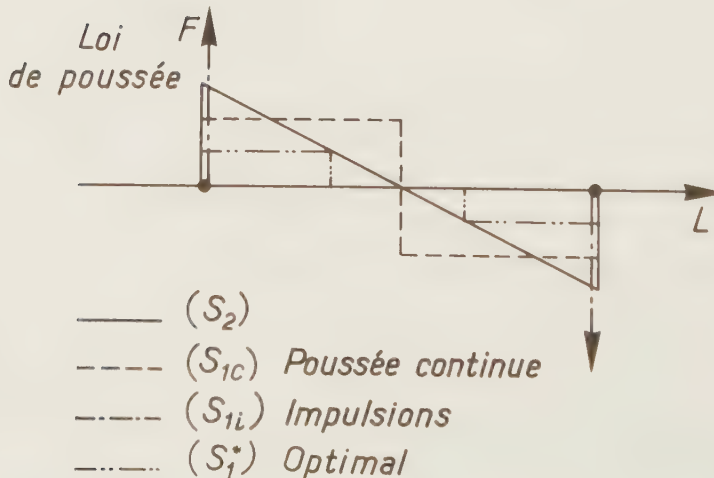


Fig. 9 - Angle de transfert très petit.



La dépense est alors :

$$(15) \quad \Delta J = \frac{6 \Delta a^2}{\Delta L^3}$$

d'où le résultat (14).

II,3.3.2. SYSTÈME DE PROPULSION (S_1): $W = \text{cte}$, $F \leq F_{\max}$.

II,3.3.2.1. GÉNÉRALITÉS.

Le plus rapide est d'intégrer directement les équations (I,3 - 65) :

$$(16) \quad \Delta a = \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{|\vec{p}_v|} (XK_{ax} + YK_{ay}) dL$$

$$(17) \quad \Delta \alpha = 0 = \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{|\vec{p}_v|} (XK_{\alpha x} + YK_{\alpha y}) dL$$

$$(18) \quad \Delta \beta = 0 = \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{|\vec{p}_v|} (XK_{\beta x} + YK_{\beta y}) dL$$

avec :

$$(19) \quad |\vec{p}_v| = (3p_e^2 \cos^2 w + 8p_a p_e \cos w + 4p_a^2 + p_e^2)^{1/2}$$

$$(20) \quad F = F_{\max} U(\Theta) \quad \left(\Theta = |\vec{p}_v| - 1, U(\Theta) = \frac{1 + \text{signe } \Theta}{2} \right)$$

$$(21) \quad XK_{ax} + YK_{ay} = 4(p_a + p_e \cos w)$$

$$(22) \quad XK_{\alpha x} + YK_{\alpha y} = p_e \sin w \sin(w + L_e) + 4p_a \cos(w + L_e) + 4p_e \cos w \cos(w + L_e) = \\ (3p_e \cos^2 w + 4p_a \cos w + p_e) \cos L_e - \sin w (3p_e \cos w + 4p_a) \sin L_e$$

$$(23) \quad XK_{\beta x} + YK_{\beta y} = -p_e \sin w \cos(w + L_e) + 4p_a \sin(w + L_e) + 4p_e \cos w \sin(w + L_e) = \\ (3p_e \cos^2 w + 4p_a \cos w + p_e) \sin L_e + \sin w (3p_e \cos w + 4p_a) \cos L_e.$$

Si bien que :

$$(24) \quad \frac{\Delta a}{F_{\max}} = A$$

$$(25) \quad \frac{\Delta \alpha}{F_{\max}} = 0 = B \cos L_e - C \sin L_e$$

$$(26) \quad \frac{\Delta \beta}{F_{\max}} = 0 = B \sin L_e + C \cos L_e$$

avec :

$$(27) \quad A = \int_{-\frac{\Delta L}{2} - L_e}^{+\frac{\Delta L}{2} - L_e} \frac{F}{F_{\max}} \frac{4(p_a + p_e \cos w)}{|\vec{p}_v|} dw$$

$$(28) \quad B = \int_{-\frac{\Delta L}{2} - L_e}^{+\frac{\Delta L}{2} - L_e} \frac{F}{F_{max}} \frac{3 p_a \cos^2 w + 4 p_a \cos w + p_e}{|\vec{p}_v|} dw$$

$$(29) \quad C = \int_{-\frac{\Delta L}{2} - L_e}^{+\frac{\Delta L}{2} - L_e} \frac{F}{F_{\max}} \frac{3p_e \cos w + 4p_a}{|\vec{p}_V|} dw.$$

Les équations (25) et (26) ne sont simultanément vérifiées que si :

$$(30) \quad B = C = 0.$$

Or

$$(31) \quad C = -\frac{1}{P_e} \int_{|\vec{p}_v|_0}^{|\vec{p}_v|_f} \frac{F(|\vec{p}_v|)}{F_{max}} d(|\vec{p}_v|).$$

Nous n'envisageons, pour l'instant, que les solutions régulières.

La condition $\mathcal{C} = 0$ ne peut être réalisée que dans les cas suivants (fig. 10) :

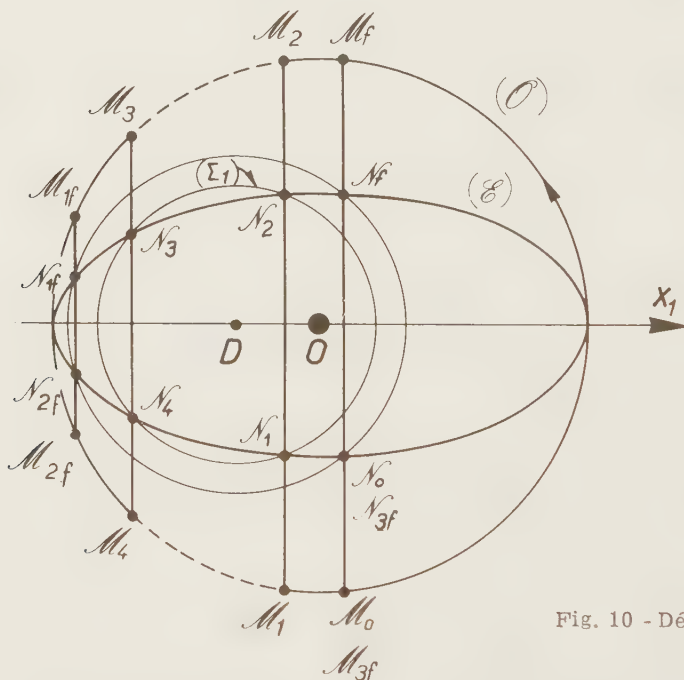


Fig. 10 - Détermination de L_e .

1. Si un au moins des points $\mathcal{M}_0$ ou $\mathcal{M}_f$ se trouve sur un arc propulsé (supposons que ce soit $\mathcal{M}_0$), il faut que $|\overrightarrow{p}_v|_f = |\overrightarrow{p}_v|_0$ donc que $\mathcal{N}_f$ occupe une des positions $\mathcal{N}_f, \mathcal{N}_{1f}, \mathcal{N}_{2f}, \mathcal{N}_{3f}$ c'est-à-dire que $\mathcal{M}_f$ occupe une des positions $\mathcal{M}_f, \mathcal{M}_{1f}, \mathcal{M}_{2f}, \mathcal{M}_{3f}$, situées sur un arc propulsé.

La position $M_{3f} = M_0$ signifie que le mobile effectue un nombre entier de révolutions.

→ Il est alors équivalent d'utiliser la solution "antisymétrique" par rapport à $\vec{\partial x}$, (différent de $\vec{\partial x}$) ou toute solution se déduisant de celle-ci par rotation autour de O . En particulier, nous pouvons choisir la solution "antisymétrique" par rapport à $\vec{\partial x}$. Nous montrerons qu'alors la solution régulière est une solution à poussée continue tangente ($1/q \rightarrow \infty$) donc, en fait, "antisymétrique"

par rapport à tout axe passant par O . Il n'y a donc pas véritablement dégénérescence par "rotation" de la solution, mais bien solution unique.

Les positions M_{1f} et M_{2f} correspondraient à des solutions où la poussée optimale serait anti-symétrique par rapport à l'axe $\vec{Ox}_1$ différent de $\vec{Ox}$, sans qu'il y ait un nombre entier de révolutions. De telles solutions ne pourraient exister que si D se trouvait placé entre les deux centres de courbure de l'ellipse ($\mathcal{E}$), situés sur le grand axe $\vec{Ox}_1$, donc pour $|q| < 3/4$.

Or, pour $|q| < \sqrt{3}/2$, l'intégrant de B (formule 28) est ≥ 0 , donc B est > 0 puisqu'il y a au moins un arc propulsé.

Les positions M_{1f} et M_{2f} sont donc à rejeter.

2. Nous venons de voir que la condition $B = 0$ implique $|q| > \sqrt{3}/2 > 3/4$ donc que les solutions optimales ne comportent pas de portion propulsée du type $\widehat{M_3 M_4}$.

Si M_0 et M_f se trouvent alors sur l'unique portion balistique $\widehat{M_2 M_1}$, les intégrales B et C ne sont pas modifiées lorsque M_0 et M_f viennent se confondre respectivement avec M_1 et M_2 . C est alors bien nul, mais B est $\neq 0$.

En effet, nous pouvons considérer cette solution comme limite d'une solution où M_0 et M_f , symétriques par rapport à $\vec{Ox}_1$ et situés sur la portion propulsée $\widehat{M_1 M_2}$, tendent respectivement vers M_1 et M_2 . Or, nous verrons que les seules solutions de ce type assurant $B = 0$ sont telles que l'arc $\widehat{M_0 M_f} < 2\pi$ contienne la portion balistique $\widehat{M_2 M_1}$. (Il s'agit bien ici de l'arc $\widehat{M_0 M_f} < 2\pi$ et non de l'arc de transfert $\widehat{M_0 M_f}$ qui, lui, peut être $> 2\pi$).

En conclusion les solutions régulières sont toujours antisymétriques par rapport à $\vec{Ox}$ ($L_e = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$) et les points départ et d'arrivée M_0 et M_f sont toujours les extrémités d'arcs propulsés mais ne coïncident pas, en général, avec les points M_1 et M_2 .

Ici encore, il est facile de voir qu'il est possible de se limiter au cas $L_e = 0$. Si le signe de Δa obtenu n'est pas convenable, il suffit d'inverser la poussée.

L'équation (26) est identiquement vérifiée. Les équations (24) et (25) s'écrivent :

$$(32) \quad \frac{\Delta a}{F_{\max}} = A \equiv \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{F_{\max}} \frac{4(q + \cos L)}{\sqrt{3 \cos^2 L + 8q \cos L + 4q^2 + 1}} dL$$

$$(33) \quad 0 = B \equiv \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{F_{\max}} \frac{3 \cos^2 L + 4q \cos L + 1}{\sqrt{3 \cos^2 L + 8q \cos L + 4q^2 + 1}} dL.$$

Les intégrales figurant aux seconds membres sont des intégrales elliptiques qu'il serait possible de réduire à des sommes d'intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèce. Mais l'intégration (pour q quelconque) n'est pas indispensable pour discuter qualitativement des solutions optimales.

II,3.3.2.2. SOLUTIONS OPTIMALES.

a) Considérons la fonction $f(x)$ de la variable $x = \cos L$:

$$(34) \quad f(x) = \frac{B(x)}{4} = -\frac{1}{2} \int_1^x \frac{3x^2 + 4qx + 1}{\sqrt{(1-x^2)(3x^2 + 8qx + 4q^2 + 1)}} dx.$$

$$2/q = -\sqrt{3}/2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^{L = \text{Arc cos } x} \frac{(1 - \sqrt{3} \cos L)^2}{2 - \sqrt{3} \cos L} dL = \frac{1}{2} \int_0^{L = \text{Arc cos } x} \left(-\sqrt{3} \cos L + \frac{1}{2 - \sqrt{3} \cos L} \right) dL$$

$$(37) \quad f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin L + \text{Arc tg } \frac{\text{tg}(L/2)}{2 - \sqrt{3}} \quad (L = \text{Arc cos } x).$$

$$3/q = -1$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \int_1^x \frac{1 - 3x}{\sqrt{(1+x)(5-3x)}} dx.$$

On pose :

$$(38) \quad y^2 = \frac{1+x}{5-3x}$$

$$(39) \quad f(x) = -4 \int_1^y \frac{(1-3y^2)dy}{(3y^2+1)^2} = 1 - \frac{4y}{1+3y^2}.$$

$$4/q = -\infty$$

$$(40) \quad f(x) = -\frac{1}{2} \int_0^{L = \text{Arc cos } x} 2 \cos L dL = -\sin L = -\sqrt{1-x^2}.$$

b) Pour $0 \leq \Delta L \leq 2\pi$, les solutions optimales correspondent à des valeurs négatives de q et à $\Delta \vartheta < 0$. Il y a deux arcs de poussée, comme le montre la figure 12. Le point D peut être soit

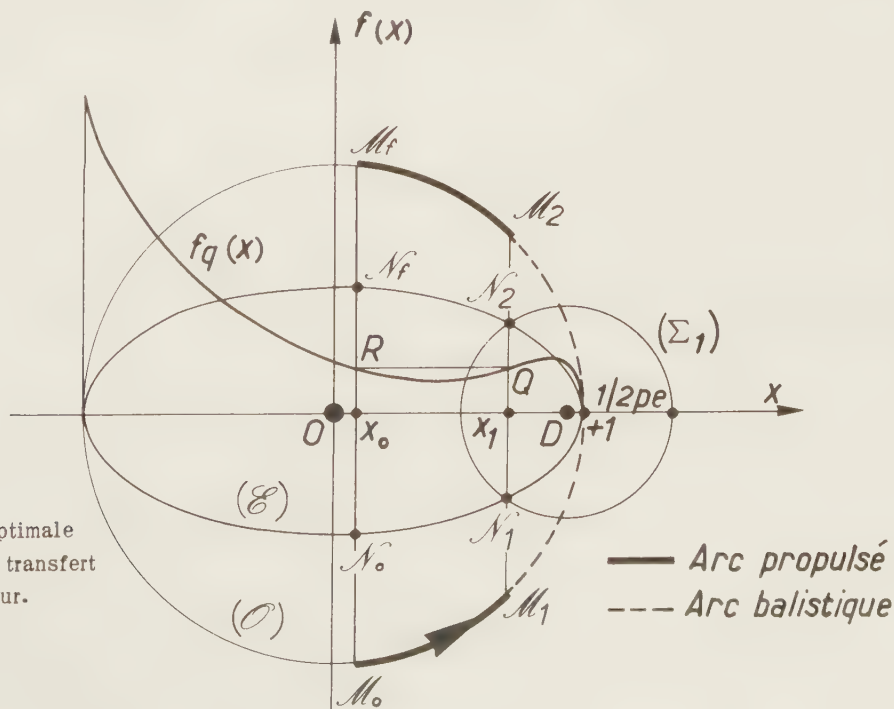


Fig. 12 - Poussée optimale (système S_1). Angle de transfert inférieur à un tour.

à l'intérieur, soit à l'extérieur de l'ellipse $(\mathcal{E})$ (fig. 6 et 7). Les points M_0 et M_1 sont tels que la condition (33) soit satisfaite, c'est-à-dire :

$$(41) \quad f(x_0) = f(x_1).$$

Les valeurs x_0 et $x_1 > x_0$ sont donc les abscisses des points d'intersection d'une courbe $f = f_q(x)$ particulière avec une parallèle à l'axe $\vec{Ox}$.

Les solutions correspondant à une valeur particulière de q ou à une valeur particulière de ΔL sont étudiées en détail dans l'Annexe 12.

c) Pour $2\pi \leq \Delta L \leq 4\pi$, les solutions optimales correspondent à des valeurs de q supérieures à 1. Il y a trois arcs de poussée, comme le montre la figure 13. Ce sont les arcs $\widehat{M_0 M_1}$, $\widehat{M_2 M_1}$, et $\widehat{M_2 M_f}$. Les points M_0 et M_1 sont tels que la condition (33) soit satisfaite, c'est-à-dire :

$$(42) \quad f(x_1) - f(x_0) + f(x_1) - f(0) = 2f(x_1) - f(x_0) = 0.$$

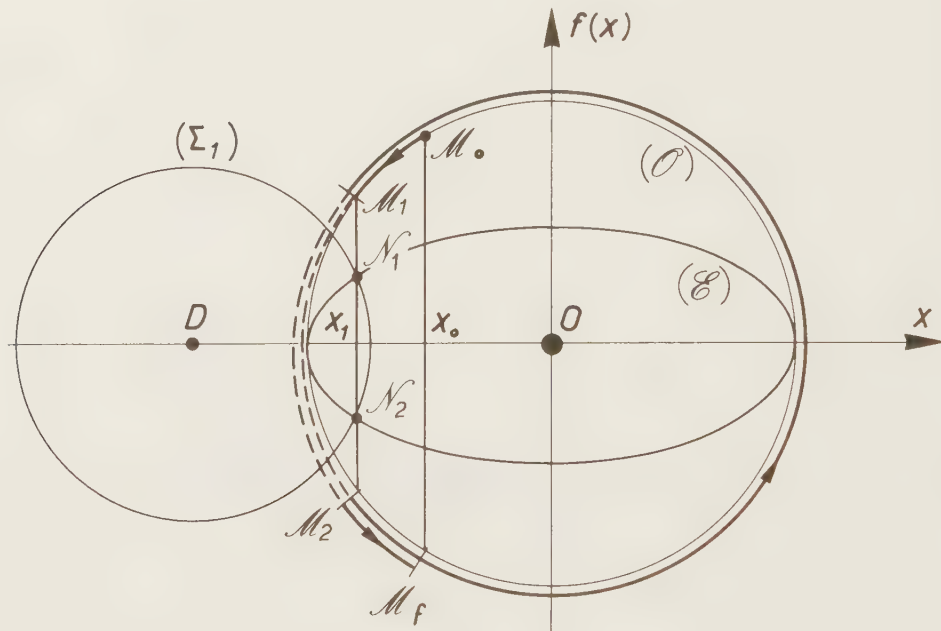


Fig. 13 - Poussée optimale (système S_1). Angle de transfert entre un et deux tours.

Les valeurs x_0 et $x_1 < x_0$ sont donc les abscisses des points d'intersection d'une parallèle à l'axe $\vec{Ox}$ avec, respectivement, une courbe $f = f_q(x)$ et sa transformée $2f$ par affinité d'axe $\vec{Ox}$, de direction $\vec{Of}$ et de rapport 2.

Ces solutions sont également discutées en Annexe 12.

d) Pour $2N\pi \leq \Delta L \leq 2(N+1)\pi$, q est ≥ 0 selon que N est $\begin{cases} \text{impair} \\ \text{pair} \end{cases}$, et il y a $N+2$ arcs de poussée.

II,3.3.2.3. CONSOMMATION.

a) Développement autour de $q = -1$.

Il est montré en Annexe 12 que pour $-1 \leq q \leq -\sqrt{3}/2$, on obtient toutes les solutions optimales dont l'angle de transfert est compris entre zéro et $2 \operatorname{Arc} \cos(1/3)$ (pour les solutions impulsioneilles) ou même, $2 \operatorname{Arc} \cos(-1/3)$ (pour les solutions "poussée continue"). Pour l'ensemble de ces solutions, posons :

$$(43) \quad q = -1 + \varepsilon$$

avec :

$$(44) \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,134.$$

De (32) et (33), nous tirons :

$$(45) \quad \frac{\Delta a}{F_{\max}} = A = A - B = \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{F_{\max}} \frac{-3 \cos^2 L + 4 \cos L (1-q) + 4q-1}{\sqrt{3 \cos^2 L + 8q \cos L + 4q^2 + 1}} dL =$$

$$\int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{F_{\max}} \left[-(1 - \cos L)^{1/2} (5 - 3 \cos L)^{-1/2} + \right.$$

$$\left. 2(1 + \cos L)(1 - \cos L)^{-1/2} (5 - 3 \cos L)^{-3/2} \varepsilon^2 + \text{ordre } \varepsilon^3 \right] dL.$$

Faisant le changement de variable (38), il vient :

$$(46) \quad \frac{\Delta a}{F_{\max}} = 16 \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(\sqrt{3}y) + \frac{y}{1+3y^2} \right]_{y_1}^{y_0} + \text{ordre } \varepsilon^2.$$

Or, l'équation de consommation s'écrit :

$$(47) \quad \lambda_{c1} = \frac{\Delta C}{F_{\max}} = \frac{W/|\Delta m|}{F_{\max}} = \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{F_{\max}} dL = 2(L_1 - L_0) = \Delta L + 2L_1.$$

Si bien que

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_0 = \left[\frac{1 + \cos \frac{\Delta L}{2}}{5 - 3 \cos \frac{\Delta L}{2}} \right]^{1/2} \\ y_1 = \left[\frac{1 + \cos \left(\frac{\Delta L}{2} - \frac{W/|\Delta m|}{2F_{\max}} \right)}{5 - 3 \cos \left(\frac{\Delta L}{2} - \frac{W/|\Delta m|}{2F_{\max}} \right)} \right]^{1/2} \end{array} \right.$$

Il est important de remarquer que, dans le développement (46), ne figure pas de terme en ε .

Si on accepte de négliger des termes de l'ordre de ε^2 ($< (0,134)^2 = 0,018$), la formule (46) réduite

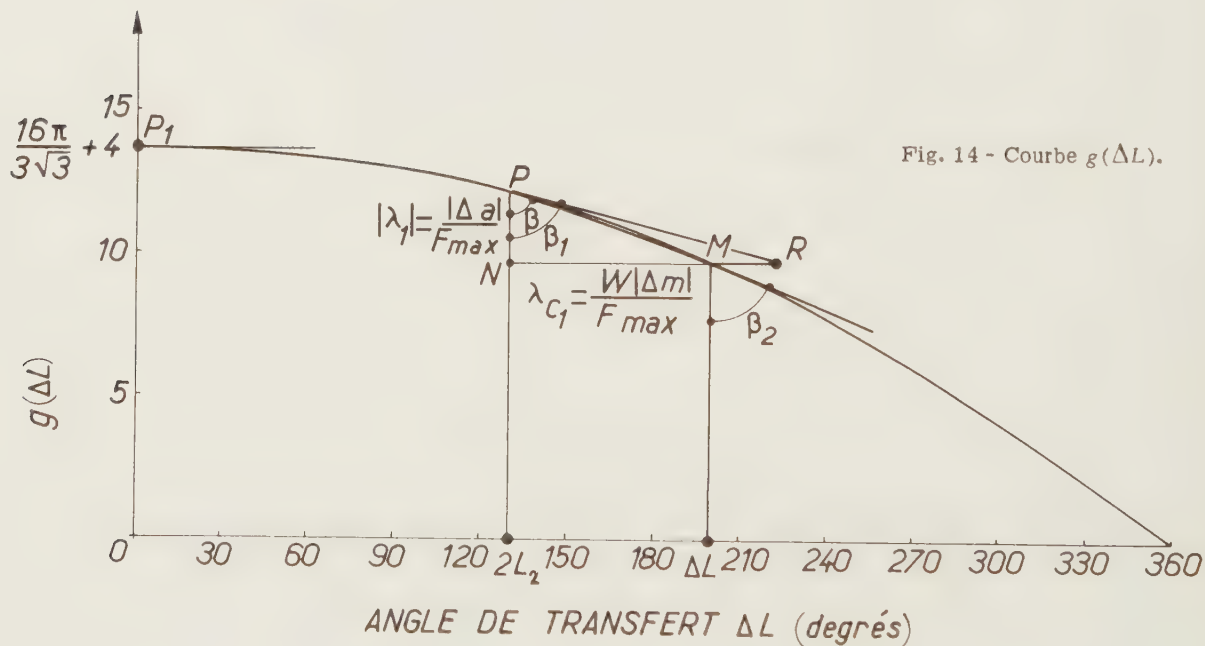
à son premier terme est une formule *explicite* permettant de calculer le transfert Δa qu'il est possible de réaliser avec une consommation $|\Delta m|$

La fonction :

$$(49) \quad g(\Delta L) = 16 \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (\sqrt{3} y) + \frac{y}{1+3y^2} \right] \text{ avec } y = \left[\frac{1 + \cos \frac{\Delta L}{2}}{5 - 3 \cos \frac{\Delta L}{2}} \right]^{1/2}$$

est tabulée avec précision dans le tableau ci-dessous et tracée sur la figure 14.

ΔL degrés	$g(\Delta L)$	ΔL degrés	$g(\Delta L)$
0	13,673	200	9,725
20	13,642	220	8,784
40	13,549	240	7,742
60	13,387	260	6,607
80	13,150	280	5,391
100	12,829	300	4,106
120	12,416	320	2,767
140	11,903	340	1,393
160	11,286	360	0,000
180	10,560		



Connaissant l'angle de transfert ΔL , on obtient le point M . On porte alors $NM = \frac{W|\Delta m|}{F_{max}}$. Le transfert qu'il est possible de réaliser, avec la consommation $|\Delta m|$ est alors donné par

$$PN = \frac{\Delta a}{F_{max}} < 0.$$

La "dilatation spécifique" est donnée par :

$$(50) \quad |\nu| = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_{c_1}} = \frac{|\Delta a|}{W|\Delta m|} = \frac{NP}{NM} = \cotg \beta.$$

Elle est maximale lorsque P est en M c'est-à-dire pour les solutions bi-impulsionnelles.

La figure 15 fournit les valeurs de la "dilatation spécifique" $|\nu|$ en fonction de l'angle de transfert pour différentes valeurs du paramètre $|\lambda_1| = \frac{|\Delta a|}{F_{max}}$.

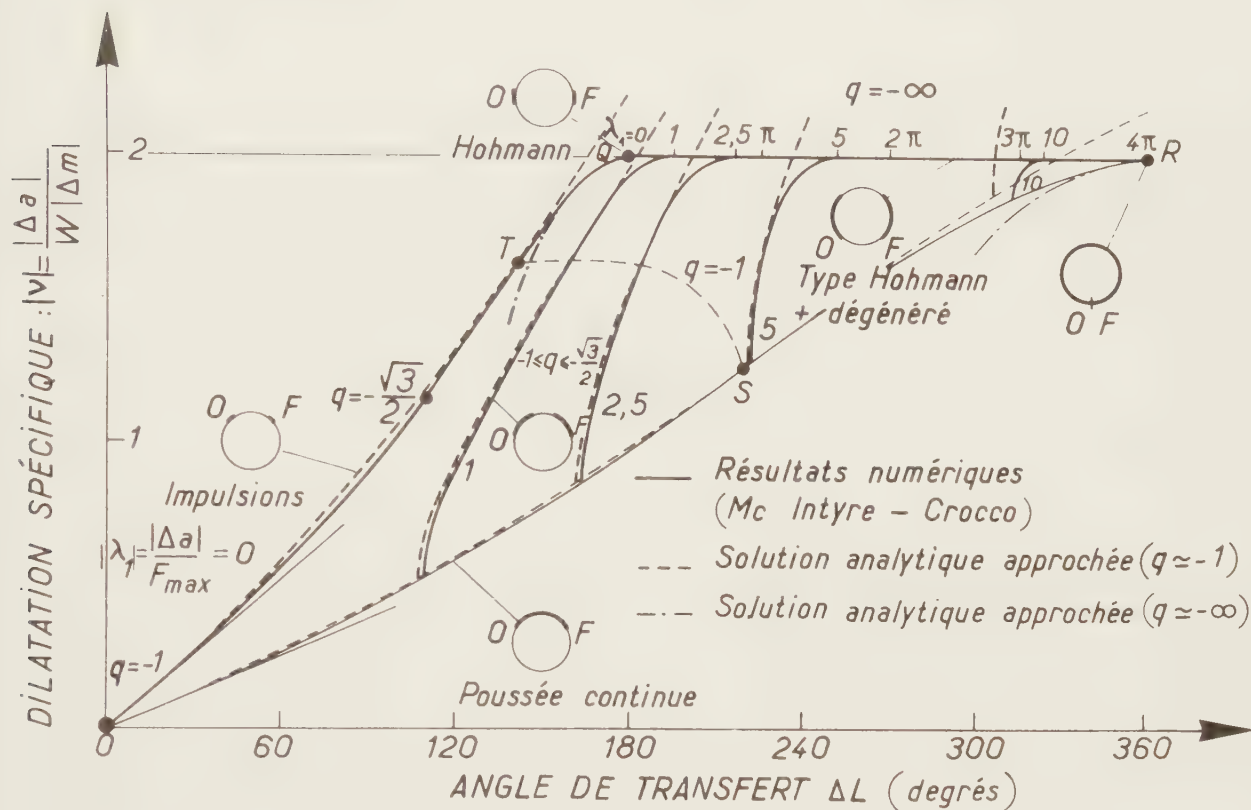


Fig. 15 - Performances du système de propulsion (S_1).

Solutions bi-impulsionnelles ($\lambda_1 = 0$, Arc $\widehat{OQ}$).

Dans ce cas :

$$(51) \quad |\nu|_{\text{approché}} = \cotg \beta = -\frac{dg(\Delta L)}{d(\Delta L)} = \left(1 - \cos \frac{\Delta L}{2}\right)^{1/2} \left(5 - 3 \cos \frac{\Delta L}{2}\right)^{1/2}.$$

La courbe peut être graduée en valeurs de q . En effet, l'équation (33) s'écrit :

$$(52) \quad 0 = B \equiv \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{\frac{F}{F_{max}}}{\left[(1 - 3 \cos L)(1 - \cos L)^{1/2} (5 - 3 \cos L)^{-1/2} + 4 \varepsilon (1 + \cos L)(5 - 3 \cos L)^{-3/2} (1 - \cos L)^{-1/2} + \text{ordre } \varepsilon^2 \right]} dL$$

soit, pour les solutions bi-impulsionnelles :

$$0 = \frac{dB}{d(\Delta L)} = \left(1 - 3 \cos \frac{\Delta L}{2}\right) \left(1 - \cos \frac{\Delta L}{2}\right)^{1/2} \left(5 - 3 \cos \frac{\Delta L}{2}\right)^{-1/2} \\ + 4 \varepsilon \left(1 + \cos \frac{\Delta L}{2}\right) \left(5 - 3 \cos \frac{\Delta L}{2}\right)^{-3/2} \left(1 - \cos \frac{\Delta L}{2}\right)^{-1/2} + \text{ordre } \varepsilon^2.$$

Une valeur approchée de ε est donc :

$$(53) \quad \varepsilon = q + 1 \simeq -\frac{1}{4} \left(1 - 3 \cos \frac{\Delta L}{2}\right) \left(1 - \cos \frac{\Delta L}{2}\right) \left(5 - 3 \cos \frac{\Delta L}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{\Delta L}{2}\right)^{-1}.$$

On peut comparer les résultats précédents avec ceux fournis par le *calcul direct* suivant.

L'application d'une impulsion faisant l'angle ψ avec l'horizontale produit :

$$(54) \quad \frac{\Delta a}{F_{max} \Delta t} = K_{ay} \cos \psi = 2 \cos \psi$$

$$(55) \quad \frac{\Delta \alpha}{F_{max} \Delta t} = K_{\alpha x} \sin \psi + K_{\alpha y} \cos \psi = \sin L \sin \psi + 2 \cos L \cos \psi.$$

La condition $\Delta \alpha = 0$ s'écrit :

$$(56) \quad \tan \psi = -2 \cotg L \text{ ou } |\cos \psi| = (1 + 4 \cotg^2 L)^{-1/2}.$$

La "dilatation spécifique" est donc :

$$(57) \quad |\nu|_{calculé} = \frac{|\Delta a|}{W/\Delta m} = 2 |\cos \psi| = \left(\frac{1}{4} + \cotg^2 \frac{\Delta L}{2}\right)^{-1/2}.$$

Les valeurs de $|\nu|$ données par (51) et (57) coïncident exactement pour $\Delta L = 0$ ($|\nu| = 0$) et $\Delta L = 2 \operatorname{Arccos}(1/3)$ ($|\nu| = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$) car, alors, $\varepsilon = 0$.

De plus, les deux courbes $|\nu|(\Delta L)$ sont tangentes en ces points, comme le montre le calcul des dérivées :

$$\frac{d|\nu|_{approché}}{d(\Delta L)} = \frac{1}{2} \sin \frac{\Delta L}{2} \left(4 - 3 \cos \frac{\Delta L}{2}\right) \left(1 - \cos \frac{\Delta L}{2}\right)^{-1/2} \left(5 - 3 \cos \frac{\Delta L}{2}\right)^{-1/2} \\ \frac{d|\nu|_{calculé}}{d(\Delta L)} = 4 \left(1 + 3 \cos^2 \frac{\Delta L}{2}\right)^{-3/2} \cos \frac{\Delta L}{2}.$$

Les deux courbes sont très proches l'une de l'autre, sauf évidemment lorsqu'on dépasse la valeur $\Delta L = 2 \operatorname{Arc} \cos \frac{1}{3}$ et qu'on s'approche de la valeur $\Delta L = \pi$, où q ne peut plus être considéré comme voisin de -1 .

Notons que :

$$(58) \quad \left[\frac{d|\nu|_{approché}}{d(\Delta L)} \right]_{\Delta L=0} = \left[\frac{d|\nu|_{calculé}}{d(\Delta L)} \right]_{\Delta L=0} = \frac{1}{2}.$$

Ce résultat peut être retrouvé très simplement, par un raisonnement analogue à celui du § II,3.3.1 : la première impulsion doit faire parcourir la distance $|\Delta a|/2$ à vitesse constante, dans le temps $\Delta L/2$ (fig. 9). La vitesse caractéristique correspondante est :

$$\Delta C_1 = \frac{|\Delta a|/2}{\Delta L/2} = \frac{|\Delta a|}{\Delta L}.$$

La vitesse caractéristique totale est :

$$\Delta C = 2 \Delta C_1 = 2 \frac{|\Delta a|}{\Delta L}$$

d'où

$$|v| = \frac{|\Delta a|}{\Delta C} = \frac{\Delta L}{2} \text{ et } \frac{|v|}{\Delta L} = \frac{1}{2}.$$

Solutions "poussée continue".

Ces solutions correspondent au cas où le point P de la figure 14 est en P_7 . Donc :

$$(59) \quad \lambda_1 = \frac{\Delta a}{F_{max}} = 16 \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc tg}(\sqrt{3} y_0) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{y_0}{1+3y_0^2} - \frac{1}{4} \right]$$

avec

$$y_0 = \left[\frac{1 + \cos \frac{\Delta L}{2}}{5 - 3 \cos \frac{\Delta L}{2}} \right]^{1/2}$$

L'accord avec les résultats numériques de Mc INTYRE et CROCCO est satisfaisant pour $q > -1$. La courbe approchée (fig. 15) et la courbe calculée numériquement sont tangentes en $0(\Delta L = 0)$ et au point $\Delta L = 2 \text{ Arccos}(-1/3)$ correspondant à :

$$|\lambda_1| = \frac{|\Delta a|}{F_{max}} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \simeq 4,84, \quad |v| = 4\pi/3\sqrt{3} \text{Arc cos}\left(-\frac{1}{3}\right) \simeq 1,265$$

car dans les deux cas, $q = -1$ ($\mathcal{E} = 0$).

Notons que, pour $\Delta L \simeq 0$, la formule (59) donne :

$$(60) \quad \frac{|v|}{\Delta L} \sim \frac{1}{4}.$$

Ce résultat peut encore être retrouvé très simplement par un raisonnement analogue à celui du § II,3.3.1 : l'accélération de poussée F_{max} appliquée de façon continue doit faire parcourir la distance $|\Delta a|/2$ dans le temps $\Delta L/2$. D'où :

$$\frac{1}{2} F_{max} \left(\frac{\Delta L}{2} \right)^2 = \frac{|\Delta a|}{2}.$$

La vitesse caractéristique correspondante est :

$$\Delta C_1 = F_{max} \frac{\Delta L}{2} = \frac{2|\Delta a|}{\Delta L}.$$

La vitesse caractéristique totale est :

$$\Delta C = 2 \Delta C_1 = \frac{4|\Delta a|}{\Delta L} \text{ d'où } |v| = \frac{|\Delta a|}{\Delta C} = \frac{\Delta L}{4}.$$

Solutions correspondant à des valeurs fixées de $|\lambda_1| = \frac{|\Delta a|}{F_{max}}$.

On a tracé sur la figure 15 les lignes correspondant aux valeurs $|\lambda_1| = 0; 1; 2,5; 5; 10$.

L'accord avec les résultats numériques de Mc INTYRE et CROCCO reste satisfaisant en deçà de la ligne $\widehat{TS}$ correspondant à $q = -1$. Cette ligne peut être tracée approximativement.

CONCLUSION : dans tout le domaine OTS et un peu au-delà de la frontière $\widehat{TS}$, la formule (46) réduite à son premier terme peut être utilisée si on admet une erreur de l'ordre de 2%.

Par contre, au voisinage des solutions singulières, cette solution approchée s'écarte beaucoup de la solution numérique et il faut avoir recours à un autre développement.

b) Développement autour de $q = -\infty$.

Posons :

$$(61) \quad q = -\frac{1}{\varepsilon_1} \quad (0 < \varepsilon_1 \ll 1).$$

Portant dans (32) et (33), il vient :

$$(62) \quad \lambda_1 = \frac{\Delta \vartheta}{F_{max}} = A = \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{F_{max}} \left[-2 + \frac{\varepsilon_1^2}{4} \sin^2 L + \text{ordre } \varepsilon_1^3 \right] dL \\ - 4\delta L + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \delta \left(\frac{L}{2} - \frac{\sin 2L}{4} \right) + \text{ordre } \varepsilon_1^3$$

$$(63) \quad B = 0 = \int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{+\frac{\Delta L}{2}} \frac{F}{F_{max}} \left(-2 \cos L + \frac{\varepsilon_1}{2} \sin^2 L + \text{ordre } \varepsilon_1^3 \right) dL = \\ -2\delta \sin L + \frac{\varepsilon_1}{2} \delta \left(\frac{L}{2} - \frac{\sin 2L}{4} \right) + \text{ordre } \varepsilon_1^3.$$

D'autre part :

$$(64) \quad \lambda_{c1} = \frac{W/\Delta m}{F_{max}} = 2\delta L$$

où le signe δ signifie qu'il faut prendre la différence des quantités envisagées pour les valeurs L_f et L_2 de la figure 12.

Tirant ε_1 de (63) :

$$(65) \quad \varepsilon_1 = \frac{8 \frac{\delta \sin L}{\delta L}}{1 - \frac{\delta \sin 2L}{\delta(2L)}} + \text{ordre } \varepsilon_1^2$$

et portant dans (62), il vient :

$$(66) \quad \lambda_1 = \frac{\Delta \vartheta}{F_{max}} = -4\delta L \left[1 - 4 \frac{\left(\frac{\delta \sin L}{\delta L} \right)^2}{1 - \frac{\delta \sin 2L}{\delta(2L)}} \right] + \text{ordre } \varepsilon_1^3.$$

Si ε_1 est suffisamment petit, c'est-à-dire, d'après (65), si $\sin L_2 \simeq \sin L_f$ (voisinage des solutions de type HOHMANN), en négligeant des termes de l'ordre de ε_1^3 , on peut utiliser la formule explicite suivante :

$$(67) \quad \lambda_1 = \frac{\Delta a}{F_{max}} = -4 \left[\frac{\Delta L}{2} - L_2 \right] \left[\frac{1 - 4 \frac{\left(\frac{\sin \frac{\Delta L}{2} - \sin L_2 \right)^2}{\frac{\Delta L}{2} - L_2}}{1 - \frac{\sin \Delta L - \sin 2L_2}{\Delta L - 2L_2}} \right]$$

avec

$$L_2 = \frac{\Delta L}{2} - \frac{W/\Delta m}{2 F_{max}},$$

pour calculer le transfert correspondant à une consommation donnée.

Lorsque $q \rightarrow -\infty$, $\sin L_2 = \sin L_f$ et alors

$$\lambda_2 = \frac{\Delta a}{F_{max}} = -4 (L_f - L_2) = -4 (\Delta L - \pi).$$

La "dilatation spécifique" est *maximale* (solutions de type HOHMANN).

$$(68) \quad |v| = \frac{|\Delta a|}{W/\Delta m} = 2.$$

SOLUTIONS BI-IMPULSIONNELLES.

Elles correspondent à $L_2 = L_f$. Alors :

$$(69) \quad |v|_{approché} = \frac{|\Delta a|}{W/\Delta m} = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_{c1}} = 2 \left[1 - 4 \frac{\left(\frac{\delta \sin L}{\delta L} \right)^2}{1 - \frac{\delta \sin 2L}{\delta(2L)}} \right] =$$

$$2 \left[1 - \frac{4 \cos^2 \frac{\Delta L}{2}}{1 - \cos \Delta L} \right] = 2 \left(1 - 2 \cotg^2 \frac{\Delta L}{2} \right)$$

formule à comparer avec celle fournie par le calcul exact figurant en (57) :

$$|v|_{calculé} = \left(\frac{1}{4} + \cotg^2 \frac{\Delta L}{2} \right)^{-1/2} \underset{\Delta L \rightarrow \pi}{\sim} 2 \left(1 - 2 \cotg^2 \frac{\Delta L}{2} \right).$$

On peut graduer la courbe en valeurs de ε_1 :

$$(70) \quad \varepsilon_1 \simeq \frac{\delta \cos \frac{\Delta L}{2}}{1 - \cos \Delta L} = 4 \frac{\cos \frac{\Delta L}{2}}{\sin^2 \frac{\Delta L}{2}}$$

soit :

$$\varepsilon_1 \underset{\Delta L \rightarrow \pi}{\sim} 4 \cos \frac{\Delta L}{2}.$$

L'accord entre $|v|$ approché et $|v|$ calculé est bon au voisinage du point Q . Puis les deux solutions divergent rapidement.

SOLUTIONS "POUSSÉE CONTINUE"

Ces solutions correspondent à $\angle_2 = 0$. D'où :

$$(71) \quad |v|_{\text{approché}} = \frac{|\Delta \vartheta|}{W|\Delta m|} = 2 \left[1 - 4 \frac{\left(\frac{\sin \frac{\Delta L}{2}}{\frac{\Delta L}{2}} \right)^2}{1 - \frac{\sin \Delta L}{\Delta L}} \right]$$

Les valeurs correspondantes de ϵ_1 sont :

$$(72) \quad \epsilon_1 \simeq \frac{8 \frac{\sin \frac{\Delta L}{2}}{\frac{\Delta L}{2}}}{1 - \frac{\sin \Delta L}{\Delta L}}$$

ce qui permet de graduer la courbe en valeurs de ϵ_1 .

L'accord avec les résultats numériques de Mc INTYRE et CROCCO est bon au voisinage du point R , puis les deux solutions divergent rapidement.

CONCLUSION : bien que n'ayant pas tabulé les solutions correspondant à des valeurs fixées de $|\lambda_1| = \frac{|\Delta \vartheta|}{F_{\max}}$ autres que zéro ($|\lambda_1| = 1; 2,5; 5; 10$ par exemple), on peut raisonnablement penser que dans une bande étroite au voisinage des solutions singulières QR , la formule (67) peut être utilisée en première approximation.

Cas où $\Delta L \gg 2\pi$.

Nous avons vu que, dans ce cas, $|q| \gg 1$ si bien qu'il est possible d'utiliser un développement au voisinage de $|q| = +\infty$. On peut utiliser la formule (66) en se limitant au premier terme et en étudiant convenablement la signification de δ .

II,3.3.2.4. COMPARAISON AVEC LE SYSTÈME DE PROPULSION (S_2): W VARIABLE, $P = P_{\max}$.

a) Système (S_{1c}) à poussée continue.

On a tracé sur la figure 8 les variations de la dilatation réduite

$$|\zeta| = \frac{|\Delta \vartheta|}{\sqrt{2} P_{\max} |\Delta m| \Delta L}$$

en fonction de l'angle de transfert ΔL , pour les solutions "poussée continue" (pour ces solutions $|\zeta| = |v|$). On peut ainsi apprécier la pénalisation due à la non-modulation de vitesse d'éjection W . Cependant, contrairement au résultat obtenu dans le cas de la rotation infinitésimale, la pénalisation est nulle pour $\Delta L = 2N\pi$ (nombre entier de révolutions) car la solution optimale obtenue pour le système de propulsion (S_2): W variable, $P = P_{\max}$, qui consiste à appliquer tangentiellement une poussée constante, coïncide avec la solution obtenue par le système de propulsion (S_1): $W = C^te$, $F \leq F_{\max}$.

Les pentes à l'origine des courbes sont respectivement :

$$\text{système } (S_2): \frac{|\zeta|}{\Delta L} = 1/2 \sqrt{3} \quad [\text{équation (14)}]$$

$$\text{système } (S_{1c}): \frac{|\zeta|}{\Delta L} = 1/4.$$

Pour $\Delta L \simeq 0$, la pénalisation est :

$$\frac{(1/2\sqrt{3}) - (1/4)}{1/2\sqrt{3}} = 1 - (\sqrt{3}/2) = 0,134$$

$\simeq 13\%$ sur $|\zeta|$, donc 26% sur Δm .

b) Système (S_1^*) à vitesse d'éjection (constante) optimale W^* .

Le transfert étant fixé (et en particulier l'angle de transfert ΔL), L_2 fixe la longueur des arcs de poussée. Nous placerons dans l'hypothèse $|q| \simeq 1$ (région *OTS* de la figure 15). Optimiser la vitesse d'éjection W à puissance P_{max} constante revient à optimiser L_2 c'est-à-dire à chercher le maximum de :

$$|\zeta(L_2)| = \sqrt{\lambda v} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda_c}} \quad \left(\lambda = \frac{\Delta \sigma}{F_{max} \Delta L} = \frac{\lambda_1}{\Delta L} \right)$$

où $|\lambda_1|$ est donné par (45) et où $\lambda_c = 1 - \frac{2L_2}{\Delta L}$.

Or $\frac{d|\zeta|}{dL_2}$ est nul pour :

$$2\lambda_c \frac{d|\lambda|}{dL_2} = |\lambda| \frac{d\lambda_c}{dL_2} = - \frac{2|\lambda|}{\Delta L}.$$

Soit :

$$|v| = \frac{|\lambda|}{\lambda_c} = - \Delta L \frac{d|\lambda|}{dL_2} = - \frac{d|\lambda_1|}{dL_2} \simeq 2(1 - \cos L_2)^{1/2} (5 - 3 \cos L_2)^{-1/2}.$$

Cette condition se traduit, sur la figure 14, par la condition très simple :

$$(73) \quad \cotg \beta^* = 2 \cotg \beta_1^* \quad \text{soit} \quad \boxed{NM^* = MR^*}$$

qui fournit facilement la longueur optimale des arcs de poussée.

Lorsque l'angle de transfert est faible ($\Delta L \sim 0$), L_2 est faible également et

$$\cotg \beta \simeq \frac{\cotg \beta_1 + \cotg \beta_2}{2}$$

où $\cotg \beta_2$ est la valeur de $|v|$ relative à la solution bi-impulsionnelle d'angle de transfert ΔL .

On en déduit :

$$(74) \quad \cotg \beta = \frac{2}{3} \cotg \beta_2 (= 2 \cotg \beta_1).$$

Sur la figure 15, la pente à l'origine de la courbe correspondant au système (S_1^*) est donc :

$$(75) \quad \cotg \beta^* = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

D'autre part,

$$\cotg \beta_1 = \frac{(\Delta L - 2L_2) \cotg \beta_0 + 2L_2 \cotg \beta_2}{\Delta L} = 2 \frac{L_2}{\Delta L} \cotg \beta_2.$$

Soit, en composant avec (74),

$$(76) \quad L_2^* = \frac{\Delta L}{6}.$$

Si bien que :

$$(77) \quad |\zeta^*| = \sqrt{\lambda v} = |v| \sqrt{\lambda_c} = \frac{\Delta L}{3} \sqrt{1 - \frac{2L_2^*}{\Delta L}} = \frac{\Delta L \sqrt{2}}{3 \sqrt{3}}$$

ce qui fournit la pente à l'origine, sur la figure 8, de la courbe relative au système (S_1^*).

Les résultats précédents peuvent être retrouvés rapidement par un raisonnement direct sur la figure 9.

La condition (I,3 - 80) se traduit par l'égalité des aires (1) et (2) (fig. 16). Donc $2L_2^* = \frac{1}{3} \frac{\Delta L}{2}$.

La pénalisation due à la non-modulation de la vitesse d'éjection n'est plus, dans ce cas que de :

$$\frac{\Delta |\zeta|}{|\zeta|} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = 0,059 \quad \text{soit environ 12\% sur la consommation de masse au lieu de 26\% .}$$

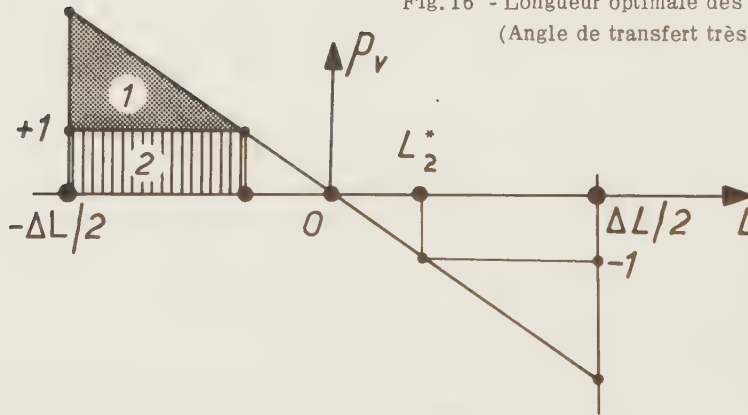


Fig. 16 - Longueur optimale des arcs de poussée maximale.
(Angle de transfert très petit) (système S_1^*).

II,3.3.2.5. SOLUTIONS SINGULIÈRES DU PROBLÈME LINÉARISÉ. DÉGÉNÉRESCENCE.

Nous avons vu que les solutions correspondant à $p_a = -\frac{1}{2}$, $p_a = 0^+$ donc $q = -\infty$ sont singulières (type I bis).

En effet, la fonction de commutation $\mathcal{H} = |\vec{p}_v| - 1$ étant identiquement nulle, il est impossible, par l'unique application du Principe du Maximum de déterminer le module de la poussée, qui reste néanmoins tangentielle.

Cependant, les équations (27) et (30) sont toujours valables :

$$(78) \quad |\lambda_1| = \frac{|\Delta a|}{F_{max}} = |A| = 2 \int_{-\frac{\Delta L}{2} - L_e}^{+\frac{\Delta L}{2} - L_e} \frac{F}{F_{max}} dL$$

$$(79) \quad \int_{-\frac{\Delta L}{2} - L_e}^{+\frac{\Delta L}{2} - L_e} \frac{F}{F_{max}} \cos L \, dL = 0$$

$$(80) \quad \int_{-\frac{\Delta L}{2} - L_e}^{+\frac{\Delta L}{2} - L_e} \frac{F}{F_{max}} \sin L \, dL = 0.$$

Ces équations reçoivent une interprétation analogue à celle déjà rencontrée au § II,1.3.2.2. :

Les solutions singulières correspondant à une valeur de $\lambda_1 = \Delta\vartheta / F_{max}$ donnée sont telles que la poussée soit appliquée tangentiellement ($|q| = \infty$) et modulée ($F = F(L)$) en respectant seulement la règle suivante :

on répartit la "masse" $\Delta\vartheta/2$ sur l'arc de transfert $\widehat{M_o M_f}$ avec la "densité linéaire" $F = F(L) \leq F_{max}$ de façon que le centre de masse soit en O .

Il n'existe pas de solution singulière correspondant à la valeur $|\lambda_1|$ donnée pour un angle de transfert ΔL inférieur à une valeur limite :

$$\Delta L(\lambda_1) = \pi + \frac{|\lambda_1|}{4} > \pi$$

pour laquelle la seule solution correspondant à une poussée tangentielle est la solution de type HOHMANN.

Pour $\Delta L(\lambda_1) < \Delta L < 2\pi$, et parmi les solutions singulières, on peut envisager (fig. 17) : des solutions de type HOHMANN, des solutions de type HOHMANN inclinées, des solutions qui s'en déduisent par découpage, enfin des solutions où la poussée est modulée sur certains arcs.

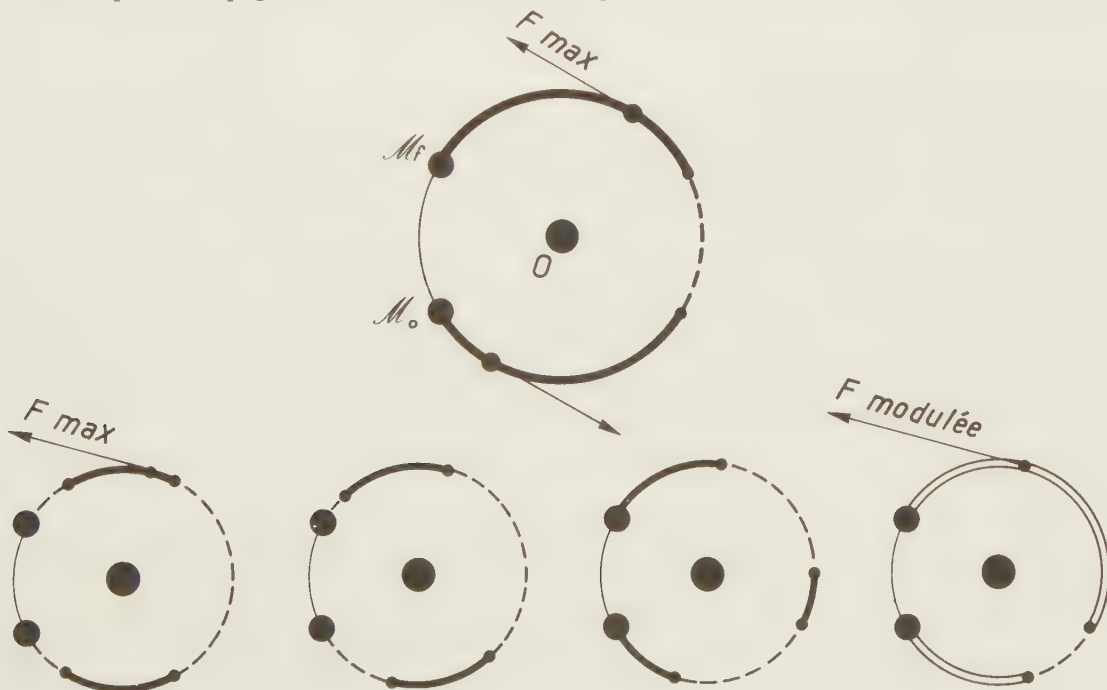


Fig. 17 - Solution de type Hohmann et solutions singulières.

Les résultats précédents pourraient être étendus au cas $\Delta L > 2\pi$.

Pour lever la dégénérescence, il faut avoir recours à un calcul aux ordres supérieurs qui sera exposé au chapitre II,4.

II,3.4. CONCLUSION.

L'étude analytique du problème du transfert entre orbites circulaires coplanaires infiniment proches, l'angle de transfert étant fixée à une valeur quelconque, se révèle, comme prévu, beaucoup plus délicate pour le système de propulsion (S_1) à vitesse d'éjection constante et à poussée limitée, que pour le système de propulsion (S_2) à vitesse d'éjection variable et à puissance du jet limitée.

Cependant, l'adoption des éléments orbitaux ϑ , α , β comme coordonnées d'état simplifie beaucoup les calculs. Il est possible, en particulier, de construire géométriquement la poussée optimale en un point quelconque de la trajectoire optimale et de calculer la consommation de façon rigoureuse pour le système (S_2) et approchée pour le système (S_1).

★

Dans le cas du système de propulsion (S_2) (vitesse d'éjection variable, puissance du jet limitée), la poussée est modulée de façon continue le long de l'arc de transfert. Elle est antisymétrique par rapport à l'axe de symétrie de l'arc de transfert.

La loi d'orientation de la poussée ne dépend que de l'angle de transfert. Pour les faibles angles de transfert (environ jusqu'à 187°), la composante tangentielle de la poussée change deux fois de sens. Dans le cas d'un nombre entier de révolutions (ou d'un très grand nombre de révolutions) la poussée optimale est tangentielle et constante.

La dilatation réduite part de la valeur zéro pour l'angle de transfert nul et après quelques oscillations se stabilise à une valeur maximale, valeur qu'elle atteint du reste, sans la dépasser, dans le cas d'un nombre entier de révolutions. Cette valeur correspond à la dilatation réduite qui serait obtenue, pour tout angle de transfert, si l'orbite finale ne devait pas être obligatoirement circulaire.

★

Dans le cas du système de propulsion (S_1) (vitesse d'éjection constante, poussée limitée), il faut faire la distinction entre les solutions régulières et les solutions singulières qui ne peuvent apparaître que pour un angle de transfert supérieur à 180° .

Les solutions régulières comportent une alternance d'arcs à poussée maximale et d'arcs balistiques, le premier arc et le dernier arc étant toujours des arcs propulsés. La poussée optimale est antisymétrique par rapport à l'axe de symétrie de l'arc de transfert. La loi d'orientation de la poussée dépend non seulement de l'angle de transfert mais encore du rapport entre la dilatation relative du rayon de l'orbite et la poussée maximale dont on dispose rapportée à l'attraction newtonienne.

L'angle de transfert et la dilatation à réaliser étant fixés, il existe une valeur minimale de la poussée maximale disponible au-dessous de laquelle le transfert est impossible.

Cette valeur correspond au transfert où la poussée est appliquée de façon continue (pas d'arc balistique).

Lorsque la poussée maximale disponible croît au-delà de cette valeur, un ou plusieurs arcs balistiques apparaissent et s'étendent peu à peu, ce qui permet de localiser la poussée dans des zones où l'efficacité est meilleure. La dilatation spécifique croît alors jusqu'à une valeur maximale.

Si l'angle de transfert est inférieur à 180° cette valeur maximale est inférieure à 2 et correspond à une solution bi-impulsionnelle (les arcs propulsés se réduisent à deux points). La poussée maximale rapportée à l'attraction locale est alors très grande vis-à-vis de la dilatation relative à effectuer.

Si l'angle de transfert est supérieur à 180° , la valeur maximale est égale à 2 et correspond aux solutions de type HOHMANN (deux arcs de poussée maximale symétriques par rapport à l'origine) pour un angle de transfert inférieur à 360° , ou de type HOHMANN généralisé pour un angle de transfert supérieur à 360° . La poussée est alors tangentielle.

Si la poussée maximale dont on dispose croît encore au-delà de la valeur correspondant à ce type de solutions (cela implique donc que l'angle de transfert soit supérieur à 180°) la solution du premier ordre n'est plus unique et dégénère en une infinité de solutions singulières.

Les solutions singulières correspondent à une application tangentielle de la poussée, modulée ou non. Il suffit de répartir la poussée le long de l'arc de transfert de telle façon que la dilatation voulue soit obtenue et que le centre de masse de la répartition soit au centre de l'orbite. Ces solutions singulières sont particulièrement importantes car, pour elles, comme pour la solution de HOHMANN et les solutions de type HOHMANN et HOHMANN généralisé, la dilatation spécifique est maximale (du moins dans l'étude linéarisée).

Entre deux systèmes de propulsion de même puissance fonctionnant de façon continue, la consommation est évidemment moindre pour celui dont la vitesse d'éjection peut être modulée.

La pénalisation sur la consommation due à la non-modulation de la vitesse d'éjection est de l'ordre de 26% pour un système à poussée continue ou de 12% pour un système à vitesse d'éjection (constante) optimale, dans le cas d'un angle de transfert faible.

II,4. TRANSFERTS OPTIMAUX, PLANS, DE TYPE HOHMANN, ENTRE ORBITES QUASI-CIRCULAIRES, PROCHES, COAXIALES DIRECTES, NON SÉCANTES.

(Système de propulsion (S_1) à vitesse d'éjection constante et poussée limitée)

II,4.1. INTRODUCTION.

Nous avons mis en évidence au § II,3.3.2.5. de l'étude linéarisée des transferts optimaux entre orbites circulaires coplanaires proches, lorsque l'angle de transfert est fixé et pour les systèmes de propulsion (S_1) , l'existence de solutions qui, bien que comportant des arcs de poussée continue, conduisent à une consommation de propulsif égale (à l'ordre considéré) à celle de la solution bi-impulsionnelle de HOHMANN.

L'étude, aux ordres supérieurs, de ces solutions a été faite par Mc INTYRE et CROCCO [42, 44] par application du Principe du Maximum de PONTYAGIN, ce qui conduit à des calculs assez complexes. Nous utiliserons ici une méthode analytique directe et les résultats obtenus intéresseront non seulement le cas des transferts plans entre orbites circulaires coplanaires proches, mais plus généralement celui des transferts plans entre orbites quasi-circulaires proches, coaxiales directes, non sécantes.

II,4.2. RAPPEL DES RÉSULTATS DE L'ÉTUDE LINÉARISÉE.

L'orbite osculatrice $(\mathcal{O})$ est définie par son "vecteur péricée" $\vec{e}$, dirigé vers le péricée P et de longueur $e = \text{ordre } \varepsilon$, de composantes :

$$(1) \quad \vec{e} \begin{cases} \alpha = e \cos \varpi \\ \beta = e \sin \varpi \end{cases}$$

nominale sur orbite V , ce qui assure que la variation relative de masse est d'ordre $\mathcal{E}$. Il suffit alors, en supposant que l'unité de masse est égale à la masse initiale m_0 du mobile, de remplacer $\gamma_{\max}$ par $F_{\max}$ dans les calculs.

Prenant B au lieu de C comme variable indépendante dans les équations (4), (5) et (6), il vient :

$$(8) \quad \frac{d\alpha}{dB} = 2 \cos L + \text{ordre } M$$

$$(9) \quad \frac{d\beta}{dB} = 2 \sin L + \text{ordre } M$$

$$(10) \quad -\frac{dC}{dB} = 1 + \frac{1}{2} \left(\psi - \frac{e}{2} \sin v \right)^2 - \frac{3e^2}{8} (1 + \cos^2 v) + \text{ordre } M^3$$

et par intégration :

$$(11) \quad \Delta\alpha = \int_{B_0}^{B_f} 2 \cos L (-dB) + \text{ordre } M^2$$

$$(12) \quad \Delta\beta = \int_{B_0}^{B_f} 2 \sin L (-dB) + \text{ordre } M^2$$

$$(13) \quad \Delta C = -\Delta B + \text{ordre } M^3.$$

Définissons alors la loi de variation de la grandeur de la poussée optimale de la manière suivante :

1. on répartit sur l'arc $\Delta L = \Delta t (1 + \text{ordre } \mathcal{E})$ (Δt fixé = durée de transfert) du cercle $(\mathcal{O})$ de rayon unité, la "masse" fictive totale fixée $-\Delta B > 0$, avec la fonction de répartition $-\left[B(L) - B_0\right]$ de façon que le centre de gravité de cette répartition soit situé au point G fixé :

$$(14) \quad G \begin{cases} x_G = \frac{\Delta\alpha}{-2\Delta B} \\ y_G = \frac{\Delta\beta}{-2\Delta B} \end{cases}$$

et que la densité linéaire $\frac{dB}{dL} \simeq \gamma$ soit $\leq \gamma_{\max}$.

G est nécessairement à l'intérieur du cercle $(\mathcal{O})$ donc $|\vec{\Delta e}| < 2/|\Delta B|$. L'orbite initiale et l'orbite finale ne sont donc pas sécantes.

2. on choisit la loi de variation de la grandeur de la poussée telle que la vitesse caractéristique consommée depuis le départ jusqu'à la position L , soit justement égale à la fonction de répartition définie plus haut (à l'ordre M^3 près), c'est-à-dire :

$$C(L) = -\left[B(L) - B_0\right] + \text{ordre } M^3.$$

Cette loi de poussée vérifie les équations (11) (12) et (13) c'est-à-dire réalise le transfert à l'ordre M^2 près et il est possible d'ajuster l'angle de transfert ΔL de façon que la durée soit égale à Δt .

Les consommations relatives à deux quelconques de ces solutions obtenues en choisissant des répartitions de masse différentes, mais réalisant le même transfert à l'ordre M^2 près, ne diffèrent que de l'ordre de M^3 comme le montre l'équation (13). Si seuls les termes du premier ordre en M sont retenus, ces solutions sont équivalentes. La grande liberté qui existe alors, en

général, dans le choix de la répartition $B(L)$, se traduit par une *dégénérescence* de la solution d'ordre M .

Si nous portons, dans les termes d'ordre M^2 de l'équation (10), les valeurs de e et v relatives à la solution d'ordre M , on commet une erreur relative d'ordre M , donc une erreur absolue d'ordre M^3 , qui est négligeable.

Or, les valeurs de e et v de la solution d'ordre M ne dépendent pas de l'angle ψ . Donc le terme en $e^2(1 + \cos^2 v)$ de l'équation (10) est indépendant de ψ et nous voyons que la valeur de ψ qui minimise la consommation ΔC pour une variation ΔB fixée est :

$$(15) \quad \psi = \frac{e}{2} \sin v + \text{ordre } \varepsilon^{3/2}.$$

Une première conséquence est que $\psi = \text{ordre } \varepsilon$, donc $M = \varepsilon$ et l'étude d'ordre M précédente coïncide avec l'étude linéarisée du problème (§ II,3.3.2.5).

Nous nous proposons ici, par une étude des ordres supérieurs au premier, de lever l'indétermination en sélectionnant les solutions optimales parmi les solutions dégénérées du problème linéarisé.

II,4.3. ÉTUDE DES ORDRES SUPÉRIEURS.

L'équation (15) montre que la poussée optimale doit être appliquée vers l'avant, pratiquement suivant la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{YMV}$ entre l'horizontale locale $\overrightarrow{MY}$ et la tangente à la trajectoire $\overrightarrow{MV}$ (fig. 1).

Ce choix étant fait, l'intégration de (10) fournit :

$$(16) \quad \Delta C = -\Delta B - \frac{3}{8} \int_{B_0}^{B_f} e^2 (1 + \cos^2 v) (-dB) + \text{ordre } \varepsilon^4.$$

L'intégrale figurant au second membre s'écrit :

$$(17) \quad \dot{I} = \int_{B_0}^{B_f} e^2 (1 + \cos^2 v) (-dB) = \frac{1}{2} \int_{(\infty)} \left[\vec{e}^2 + (\vec{e} \cdot \vec{t})^2 \right] ds$$

où $\vec{t}$ est le vecteur unitaire de la tangente au lieu (∞) de l'extrémité E du vecteur péricée $\vec{e}$, et s l'abscisse curviligne sur ce lieu (fig. 2). L'ascension droite L n'est autre que l'angle $L = (\overrightarrow{Ox}, \vec{Et})$, et l'anomalie vraie, l'angle $v = (\overrightarrow{OE}, \vec{Et})$. L'angle de transfert ΔL est l'angle balayé par la tangente $\vec{Et}$. Notons qu'il suffit que tous ces éléments soient définis avec une précision relative d'ordre ε .

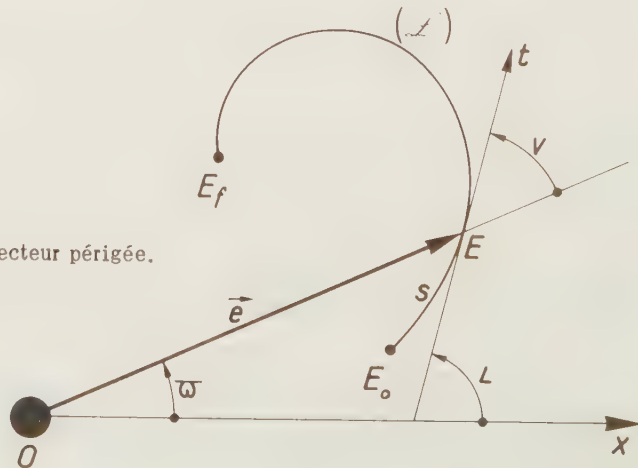


Fig. 2 - Lieu de l'extrémité du vecteur péricée.

Le problème revient à déterminer la courbe ($\mathcal{L}$) de longueur fixée :

$$(18) \quad S = \int_{(\mathcal{L})} ds = -2\Delta B \gg |\vec{\Delta e}| = E_o E_f \gg 0$$

qui rend l'intégrale $\dot{I}$ maximale.

Nous pouvons, sans restreindre la généralité de l'étude, supposer que l'accélération est égale à l'accélération maximale γ_{max} ou est nulle, toute phase éventuelle d'accélération intermédiaire ($0 < \gamma < \gamma_{max}$) pouvant être théoriquement considérée comme une succession rapide d'arcs à poussée maximale et d'arcs balistiques.

L'intégration de (3) et (4) sur un arc d'accélération maximale fournit :

$$(19) \quad E \begin{cases} \alpha = \alpha_i + 2 \gamma_{max} (\sin L - \sin L_i) + \text{ordre } \varepsilon^2 \\ \beta = \beta_i - 2 \gamma_{max} (\cos L - \cos L_i) + \text{ordre } \varepsilon^2 \end{cases}$$

Le point E décrit donc, à l'ordre ε^2 près, un arc de cercle (S_k) de rayon $\rho = 2 \gamma_{max}$ (fig. 3).

Le problème consiste donc à ajuster ces "festons" de façon que leur longueur totale $\sum_{k=1}^n = S$ soit fixée et que l'intégrale $\dot{I}$ soit minimale.

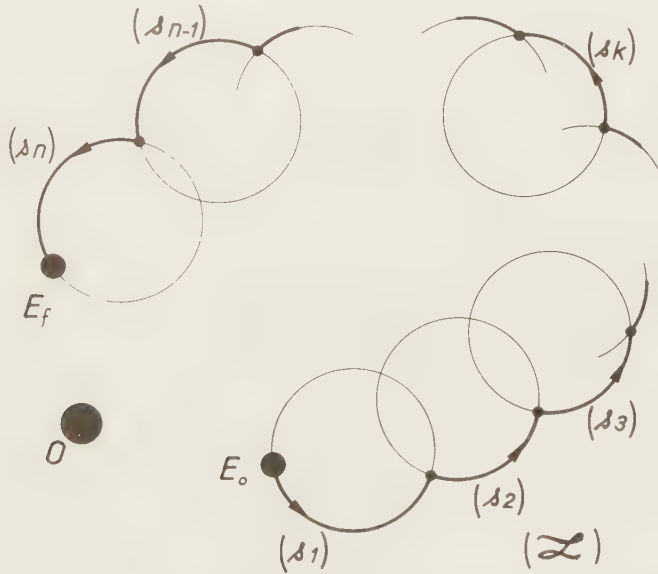


Fig. 3 - Succession d'arcs d'accélération maximale et d'arcs balistiques.

II,4.3.1. SOLUTIONS IMPULSIONNELLES.

Si l'accélération maximale γ_{max} dont on dispose est infinie, les festons se réduisent à des segments (rayon $\rho = \infty$). L'ascension droite L est constante lorsque la poussée est appliquée. Il y a donc succession d'impulsions (fig. 4). Le cas général impulsif (points E_o et E_f quelconques) a été étudié par MARCHAL [15]. Nous nous bornerons ici au cas des transferts entre orbites coaxiales directes. Les points O , E_o et E_f sont alors alignés et O est à l'extérieur du segment $E_o E_f$ (fig. 5).

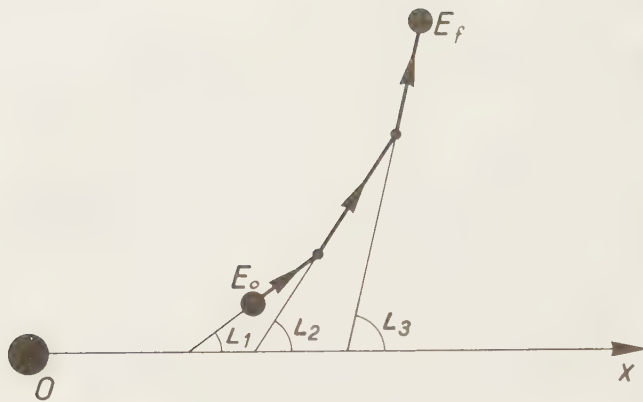


Fig. 5 - Orbites coaxiales directes.



Fig. 4 - Cas impulsif.

Nous avons toujours :

$$(20) \quad \dot{I} = \frac{1}{2} \int_{(\mathcal{L})} e^2 (1 + \cos^2 v) ds \leq \int_{(\mathcal{L})} e^2 ds = \dot{I}'.$$

Supposons trouvé le chemin $(\mathcal{L}_H)$ de longueur S qui maximise $\dot{I}'$ et que dans ces conditions $\cos v \equiv 1$. $(\mathcal{L}_H)$ maximise alors $\dot{I}$. Or :

$$(21) \quad e \leq e_o + s$$

$$(22) \quad e \leq e_f + S - s$$

(fig. 6)

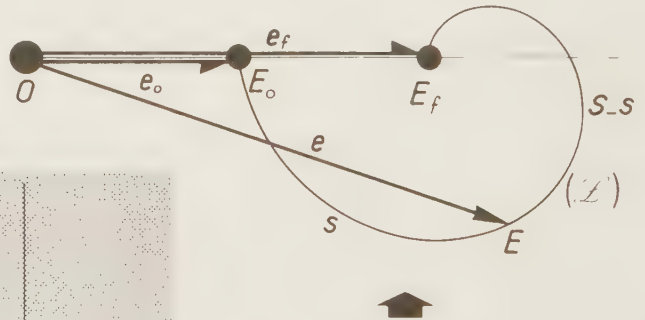


Fig. 6 - Orbites coaxiales directes non sécantes.

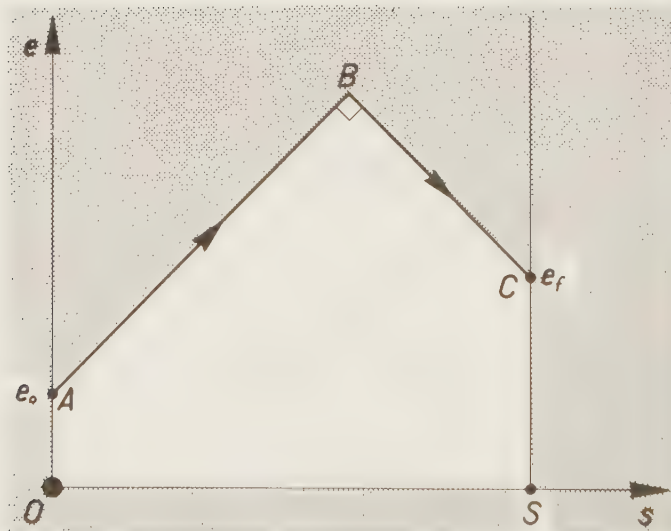


Fig. 7

$\dot{I}'$ est donc maximale lorsque la fonction $e(s)$ est représentée par la ligne ABC (fig. 7) c'est-à-dire lorsque $(\mathcal{L}_H)$ est formée de deux segments $E_o M$ et $M E_f$ portés par la droite $O E_o E_f$, M étant le point de $(\mathcal{L}_H)$ le plus éloigné de l'origine O (fig. 8).

On a bien alors $\cos v \equiv 1$, donc $\dot{I} = \dot{I}'$ est maximale.

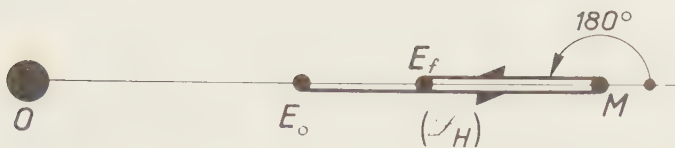


Fig. 8 - Transfert bi-impulsionnel.

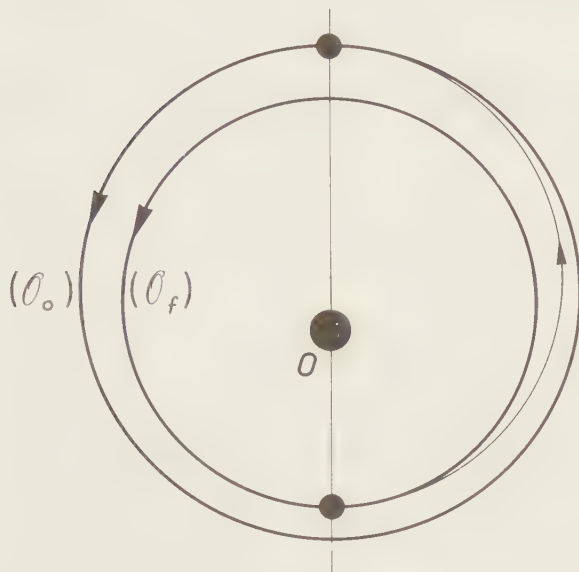


Fig. 9 - Transfert bi-impulsionnel.

La solution optimale consiste à appliquer une impulsion au périhélie ($\nu = 0$) de l'orbite initiale et une impulsion à l'apogée ($\nu = \pi$) de l'orbite finale.

(Transfert de HOHMANN) (fig. 9).

Si on dispose de plusieurs révolutions, il est possible de décomposer les segments $E_o M$ et $M E_f$ en sous-segments :

$E_o E_1$, $E_1 E_2$, $E_2 M$, $M E_3$, $E_3 E_f$ par exemple (fig. 10), c'est-à-dire de fractionner les impulsions précédentes (fig. 11); on peut alors décrire un nombre entier n_k de fois chaque orbite intermédiaire représentée par le point E_k . [La tangente à $(\mathcal{L}_H)$ en E_k balaye un angle de $n_k 360^\circ$].

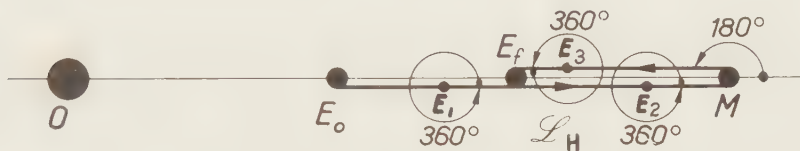


Fig. 10 - Transfert multi-impulsionnel.

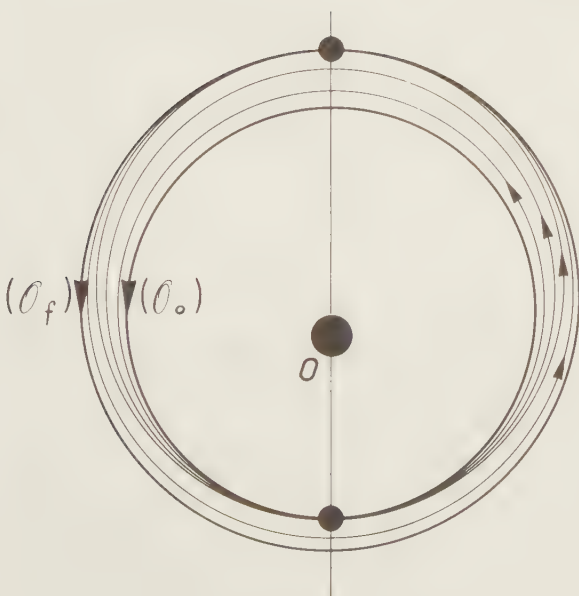


Fig. 11 - Transfert multi-impulsionnel.

De toute façon, les impulsions sont appliquées d'abord au périhélie, puis à l'apogée. Il n'y a pas alternance [$(\mathcal{L}_H)$ n'a qu'un point de rebroussement : en M]. Ces résultats classiques figurent en particulier dans la référence [11].

II,4.3.2. SOLUTIONS A ACCÉLÉRATION LIMITÉE.

L'accélération maximale γ_{max} n'étant plus infinie, il est impossible d'avoir $\cos v \equiv 1$ le long du chemin ($\mathcal{L}$) composé de festons. L'équation (16) et l'inégalité (20) montrent alors que, pour un même transfert, la consommation ΔC relative à une solution à accélération limitée, même optimale, est supérieure à la consommation ΔC_H relative à la solution de HOHMANN.

II,4.3.2.1. CAS PARTICULIER DE DEUX ARCS D'ACCÉLÉRATION MAXIMALE, POUR UN TRANSFERT ENTRE ORBITES CIRCULAIRES PROCHES.

L'intégrale $\dot{I}$ devient, dans ce cas :

$$(23) \quad \dot{I} = \frac{1}{2} \int_{(\mathcal{L})} e^2 (1 + \cos^2 v) \frac{de}{\cos v} = \rho^3 \left(\frac{5}{2} \varphi - 2 \sin \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right)$$

où φ est l'angle au centre des festons $\left(\varphi = \frac{S}{2\rho} = \frac{\Delta a}{4\gamma_{max}} \right)$ (fig. 12).

L'écart relatif des vitesses caractéristiques entre la solution à deux arcs de poussée et la solution bi-impulsionnelle de HOHMANN est donc, pour un même transfert :

$$\frac{\Delta C - \Delta C_H}{\Delta C_H} = \frac{3\Delta a^2}{4} \left[\frac{1}{12} - \left(\frac{\gamma_{max}}{\Delta a} \right)^3 (20\varphi - 16\sin\varphi - 2\sin 2\varphi) \right] (1 + \text{ordre } \varepsilon)$$

formule déjà trouvée par Mc INTYRE [42] qui s'écrit encore :

$$(24) \quad \frac{\Delta C - \Delta C_H}{\Delta C_H} = \frac{\Delta a^2}{128} \left(8 - 3 \frac{10\varphi - 8\sin\varphi - \sin 2\varphi}{\varphi^3} \right) (1 + \text{ordre } \varepsilon)$$

et si φ est petit :

$$(25) \quad \frac{\Delta C - \Delta C_H}{\Delta C_H} = \frac{\Delta a^2 \varphi^2}{128} \left[1 + \text{ordre } \max(\varepsilon, \varphi^2) \right]$$

Le supplément de vitesse caractéristique par rapport à la solution de HOHMANN est donc d'ordre $\varepsilon^3 \varphi^2$, et cela quel que soit φ c'est-à-dire l'importance des deux arcs de poussée (fig. 13).

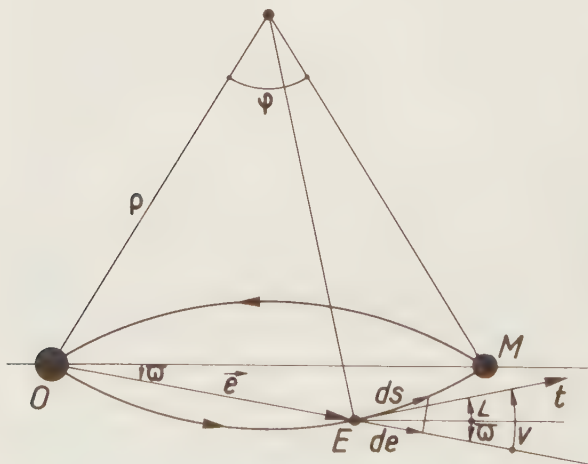


Fig. 12 - Deux arcs d'accélération maximale.

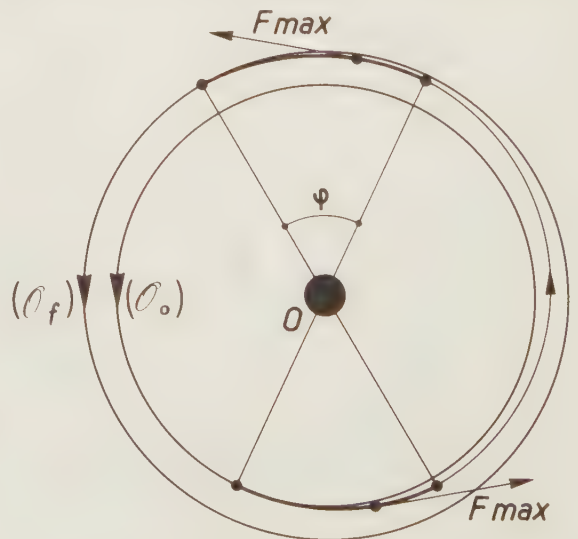


Fig. 13 - Deux arcs d'accélération maximale.

II,4.3.2.2. NOMBRE D'ARCS QUELCONQUES.

La condition $\cos v \equiv 1$ étant caractéristique de la solution de HOHMANN réalisant l'optimum, il faut s'attendre à ce que la solution optimale à accélération limitée soit telle que $\cos v \simeq 1$, du moins si l'accélération maximale est suffisamment grande pour la durée imposée de transfert, ce que nous supposons.

Cela équivaut à un étalement des arcs de poussée autour des points impulsionnels, correspondant à "l'efficacité" maximale. C'est bien le cas pour le transfert entre cercles proches utilisant deux arcs propulsés, analysé au paragraphe précédent. L'intégrale $\dot{I}$, s'écrit encore, pour $\sin v \simeq 0$:

$$(26) \quad \dot{I} = \frac{1}{2} \int_{(\mathcal{L})} e^2 (1 + \cos^2 v) \frac{de}{\cos v} = \int_{(\mathcal{L})} e^2 \left(1 + \frac{\sin^4 v}{8} + \text{ordre } \sin^6 v \right) |de|$$

soit en intégrant :

$$(27) \quad \dot{I} = -\frac{(e_o)^3 + (e_f)^3}{3} + \frac{2}{3} e_M^3 + \text{ordre } e_M^3 \sin^4 v$$

où e_M est l'excentricité maximale obtenue au cours du transfert.

Supposons que les festons péricée (c'est-à-dire correspondant au trajet $\widehat{E_o M}$) aient des longueurs S_k fixées (fig. 14). Les longueurs C_k des cordes correspondantes sont fixées. $\dot{I}$ est maximale pour e_M maximal, c'est-à-dire lorsque les cordes sont alignées sur la droite $OE_o E_f$, sans que le trajet péricée $(\mathcal{L}_p)$ présente de rebroussement.

Supposons maintenant que, dans cette hypothèse d'alignement, seule la longueur totale :

$$(28) \quad S_p = \sum_{k=1}^{n_p} S_k = \rho \sum_{k=1}^{n_p} \varphi_k$$

des festons péricée soit fixée. Alors :

$$(29) \quad e_M - e_o = \sum_{k=1}^{n_p} C_k = \rho \sum_{k=1}^{n_p} \left(\varphi_k - \frac{\varphi_k^3}{24} + \text{ordre } \varphi_k^5 \right)$$

est maximum lorsque $\sum_{k=1}^{n_p} \varphi_k^3$ est minimum c'est-à-dire pour des festons péricée égaux ($\varphi_k = \varphi_p$; $k = 1, 2, \dots, n_p$)

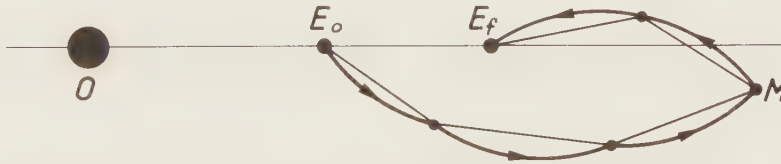


Fig. 14 - Succession d'arcs d'accélération maximale et d'arcs balistiques.

Par un raisonnement analogue, on démontrerait l'égalité des festons apogée ($\varphi_k = \varphi_A$; $k = n_p + 1, \dots, n$) lorsque la longueur totale S_A des festons apogée est fixée.

Si, à présent, c'est seulement la longueur totale $S = S_p + S_A$ du trajet $(\mathcal{L})$ qui est fixée, les festons péricée et les festons apogée doivent encore respectivement être égaux entre eux (fig. 15 et 16). En effet, si, par exemple, les festons péricée n'étaient pas égaux entre eux, il serait possible d'obtenir la même valeur de e_M avec une longueur péricée $S'_p < S_p$ donc avec une longueur totale $S' = S'_p + S_A < S = S_p + S_A$ et la solution ne serait pas optimale.

Un calcul plus précis [en tenant compte du terme $e_M^3 \sin^4 v$ négligé dans (27)] montre que



Fig. 15 - Solution optimale.

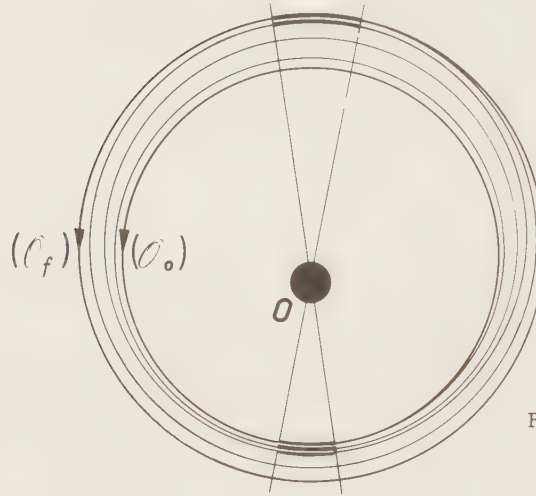


Fig. 16 - Solution optimale.

l'alignement des cordes n'est qu'approximativement réalisé (les cordes des festons font des angles de l'ordre de φ^3 avec la droite $OE_o E_f$) et que les différences relatives entre les longueurs des festons péricée ou apogée sont de l'ordre de φ^2 . Le supplément de précision est inutile dans cette étude si φ est d'ordre ε .

Il reste à fixer les nombres n_p , n_A et les grandeurs respectives des festons péricée et des festons apogée, c'est-à-dire à rendre :

$$(30) \quad J_1 = \frac{e_M - \frac{1}{2}(e_o + e_f)}{\rho} = n_p \sin \frac{\varphi_p}{2} + n_A \sin \frac{\varphi_A}{2}$$

maximal, avec les contraintes :

$$(31) \quad n_p + n_A = n = E\left(N + \frac{3}{2}\right) = \text{entier fixé}$$

n = nombre d'arcs de poussée, E = partie entière.

N = nombre de révolutions autorisé par la durée du transfert.

(Tant que $N \ll \frac{\delta}{\Delta a^2}$, ce qui est pratiquement toujours le cas, il est équivalent de fixer la durée Δt du transfert ou le nombre de révolutions N).

$$(32) \quad n_p \varphi_p + n_A \varphi_A = \frac{S}{\rho} = \Delta \text{ fixé}$$

$$(33) \quad 2n_p \sin \frac{\varphi_p}{2} - 2n_A \sin \frac{\varphi_A}{2} = \frac{e_f - e_o}{\rho} = \frac{\Delta e}{\rho} = \Delta \text{ fixé}$$

$$(34) \quad n_p, n_A = \text{entiers.}$$

Dans une première approximation, nous remplacerons $\sin \frac{\varphi}{2}$ par $\frac{\varphi}{2}$ dans (33) : on tire alors :

$$(35) \quad 2 n_p \varphi_p = \mathcal{L} + \Delta = 2F \gg 0$$

$$(36) \quad 2 n_A \varphi_A = \mathcal{L} - \Delta = 2G \gg 0$$

$$(37) \quad J = 24 \left(\mathcal{L} - 2J_1 \right) = \frac{F^3}{n_p^2} + \frac{G^3}{n_A^2} = J_p + J_A.$$

Si on ne tient pas compte de la condition (34), J est minimum pour $n_p = n_p^*$, $n_A = n_A^*$ non nécessairement entiers et $\varphi_A = \varphi_p = \varphi^*$ (fig. 17). Tenant compte de (34), il faut choisir entre les valeurs $n_p = E(n_p^*)$ et $n_p = E(n_p^* + 1)$ avec $n_A = n - n_p$ celle qui rend J minimal. En général, il n'y a pas ambiguïté. Notons que si $\Delta e = 0$, $F = G = \frac{\mathcal{L}}{2}$, les courbes J_p et J_A sont symétriques, donc : $n_p^* = n_A^* = \frac{n}{2}$. Si $n = 2r$ est pair, il y a une seule solution optimale présentant r arcs de poussée au périhélie et r arcs de poussée à l'apogée.

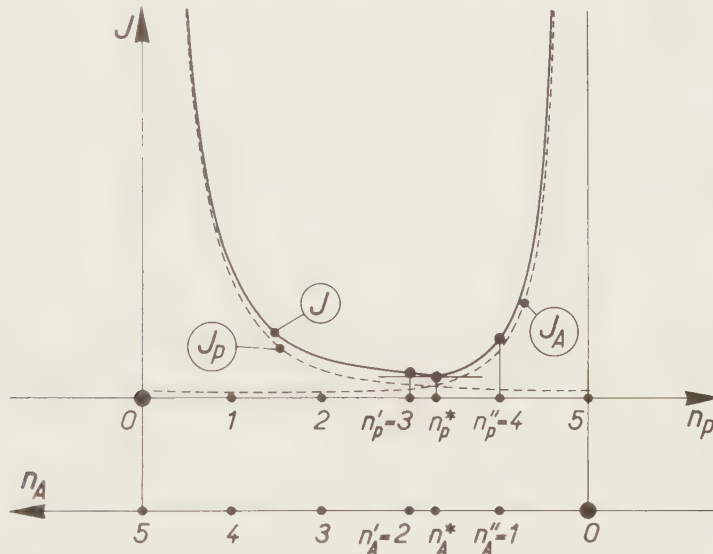


Fig. 17

Si $n = 2r + 1$ est impair, il y a ambiguïté, J prenant la même valeur pour la solution où l'arc de poussée supplémentaire a lieu au périhélie et la solution où il a lieu à l'apogée.

L'ambiguïté ne peut être levée que par un calcul aux ordres supérieurs.

On obtient alors $n_p = r + 1$ et $n_A = r$.

II,4.3.2.3. DURÉES DES ARCS DE POUSSÉE.

Nous supposons tout d'abord que le système de propulsion est à accélération limitée ($0 < \gamma < \gamma_{max}$).

Soit $\delta t_{pk} = \frac{\delta \mathcal{C}_{pk}}{\gamma_{max}}$, la durée de l'arc de poussée au périhélie numéro k .

$\delta \mathcal{C}_{pk}$ est la vitesse caractéristique consommée correspondante :

$$(38) \quad \delta \mathcal{C}_{pk} = -\delta B_{pk} (1 + \text{ordre } \varepsilon^2)$$

or :

$$(39) \quad B = P^{-1/2} (1 + e)^{-1/2} (1 - e^2)^{1/4} = P^{-1/2} \left(1 - \frac{e}{2} + \frac{e^2}{8} + \text{ordre } e^3 \right)$$

où P est la distance du centre d'attraction au péricée.

Donc, pour un arc de poussée au péricée :

$$(40) \quad \delta B = -\frac{1}{2} P^{-3/2} \delta P (1+e)^{-1/2} (1-e^2)^{1/4} + P^{-1/2} \left(-\frac{\delta e}{2} + \frac{e \delta e}{4} + \text{ordre}^2 \delta e \right).$$

Afin de simplifier les calculs, nous supposons que les arcs de poussée sont courts. La formule de perturbation de la distance du péricée montre alors que :

$$(41) \quad \frac{\delta P}{\delta C} = \text{ordre } \varphi^2 \quad (\varphi = \text{angle au centre du feston})$$

c'est-à-dire que le péricée se déplace très peu, donc :

$$(42) \quad \delta B = P_0^{-1/2} \left(-\frac{\delta e}{2} + \frac{e \delta e}{4} \right) \left\{ 1 + \text{ordre max} \left[\varepsilon^2, \left(k - \frac{1}{2} \right) \varphi^2 \right] \right\}$$

et

$$(43) \quad \delta t_{Pk} = \frac{P_0^{-1/2}}{\gamma_{\max}} \left(\frac{\delta e_{Pk}}{2} - \frac{e_{Pk} \delta e_{Pk}}{4} \right) \left\{ 1 + \text{ordre max} \left[\varepsilon^2, \left(k - \frac{1}{2} \right) \varphi^2 \right] \right\}$$

Les variations δe_{Pk} sont toutes égales à $\delta e_P = \frac{e_M - e_0}{n_P}$, longueur des cordes des festons péricée. e_{Pk} est la valeur moyenne de e pour l'arc péricée numéro k .

$$(44) \quad \delta t_{Pk} = \frac{P_0^{-1/2} (e_M - e_0)}{2 n_P \gamma_{\max}} \left(1 - \frac{e_{\text{moyen sur l'arc } k}}{2} \right) \left\{ 1 + \text{ordre max} \left[\varepsilon^2, \left(k - \frac{1}{2} \right) \varphi^2 \right] \right\} =$$

$$\frac{P_0^{-1/2} (e_M - e_0)}{2 n_P \gamma_{\max}} \left[1 - \frac{e_0}{2} - \frac{\left(k - \frac{1}{2} \right)}{2 n_P} (e_M - e_0) \right] \left\{ 1 + \text{ordre max} \left[\varepsilon^2, \left(k - \frac{1}{2} \right) \varphi^2 \right] \right\}$$

On démontrerait de même, pour les arcs apogée :

$$(45) \quad \delta t_{Ak} = \frac{A_f^{-1/2} (e_M - e_f)}{2 n_A \gamma_{\max}} \left(1 + \frac{e_{\text{moyen sur l'arc } k}}{2} \right) \left\{ 1 + \text{ordre max} \left[\varepsilon^2, \left(n - k + \frac{1}{2} \right) \varphi^2 \right] \right\} =$$

$$\frac{A_f^{-1/2} (e_M - e_f)}{2 n_A \gamma_{\max}} \left[1 + \frac{e_f}{2} + \frac{\left(n - k + \frac{1}{2} \right) (e_M - e_f)}{2 n_A} \right] \left\{ 1 + \text{ordre max} \left[\varepsilon^2, \left(n - k + \frac{1}{2} \right) \varphi^2 \right] \right\}.$$

Les durées des arcs de poussée décroissent donc en progression arithmétique, de raison

$$- \frac{P_0^{-1/2}}{\gamma_{\max}} \left(\frac{e_M - e_0}{2 n_P} \right)^2 \text{ pour les arcs péricée et } - \frac{A_f^{-1/2}}{\gamma_{\max}} \left(\frac{e_M - e_f}{2 n_A} \right)^2 \text{ pour les arcs apogée.}$$

On vérifie aisément que le rapport :

$$(46) \quad r = \frac{\text{somme des durées des arcs apogée}}{\text{somme des durées des arcs péricée}} = \frac{\sum_{k=1}^n \delta t_{Ak}}{\sum_{k=1}^{n_P} \delta t_{Pk}}$$

est, dans le cas d'un transfert entre orbites circulaires ($e_0 = e_f = 0$), égal à :

$$(47) \quad r = 1 - \frac{\Delta a}{4}$$

c'est-à-dire le rapport $\frac{\Delta V_A}{\Delta V_P}$ des impulsions de HOHMANN.

Si le système de propulsion est à poussée limitée ($F \leq F_{max}$) et non plus à accélération limitée, l'allègement progressif du mobile permet un raccourcissement supplémentaire de la durée des arcs de poussée. La durée de l'arc numéro k n'est plus δt_k mais $\delta t'_k = \delta t_k + \delta(\delta t_k)$ avec :

$$(48) \quad \frac{\delta(\delta t_k)}{\delta t_k} = \frac{m_k - m_0}{m_0} = -\frac{C_k}{W} = \frac{B_k - B_0}{W} = \begin{cases} -\frac{P^{-1/2}}{W} \frac{e_{Pk} - e_0}{2} \approx -\frac{e_{Pk} - e_0}{2W} \\ -\frac{P^{-1/2}}{W} \frac{e_M - e_0}{2} + \frac{A^{-1/2}}{W} \frac{e_{Ak} - e_M}{2} \approx \\ \frac{e_k + e_0 - 2e_M}{2W} \end{cases}$$

où W est la vitesse d'éjection et e_k la valeur moyenne de e pour le feston k .

D'où :

$$(49) \quad \delta t'_{Pk} = \frac{P_0^{-1/2}(e_M - e_0)}{2n_P \gamma_{max}} \left[1 - \frac{e_0}{2} - \frac{(k - \frac{1}{2})}{2n_P} (e_M - e_0) \left(1 + \frac{1}{W} \right) \right] \left\{ 1 + \text{ordre max} \left[\varepsilon^2, \left(k - \frac{1}{2} \right) \varphi^2 \right] \right\}$$

et

$$(50) \quad \delta t'_{Ak} = \frac{A_f^{-1/2}(e_M - e_f)}{2n_A \gamma_{max}} \left[1 + \frac{e_f}{2} - \frac{(n - k + \frac{1}{2})}{2n_A} (e_M - e_f) \left(1 + \frac{1}{W} \right) + \frac{e_f + e_0 - 2e_M}{2W} \right] \\ \times \left\{ 1 + \text{ordre max} \left[\varepsilon^2, \left(n - k + \frac{1}{2} \right) \varphi^2 \right] \right\}$$

Notons que (49) et (50) se ramènent respectivement à (44) et (45) lorsque W est infini.

II,4.3.2.4. ANGLES AU CENTRE DES ARCS DE POUSSÉE.

L'angle δL_{Pk} balayé par le rayon vecteur pendant la phase propulsée numéro k au périégée est lié à la durée δt_{Pk} de cette phase par :

$$(51) \quad \left(\frac{\delta L}{\delta t} \right)_{Pk} = \left(\frac{h}{r^2} \right)_{Pk} = P_0^{-3/2} \left(1 + \frac{e_{Pk}}{2} \right) \left\{ 1 + \text{ordre max} \left[\varepsilon^2, \left(k - \frac{1}{2} \right) \varphi^2 \right] \right\}$$

(h = moment cinétique),

d'où, en utilisant l'équation (49) :

$$(52) \quad \delta L_{Pk} = \frac{P_0^{-2}(e_M - e_0)}{2n_P \gamma_{max}} \left(1 - \frac{e_{Pk} - e_0}{2W} \right) \left\{ 1 + \text{ordre max} \left[\varepsilon^2, \left(k - \frac{1}{2} \right) \varphi^2 \right] \right\}$$

De même, pour des arcs de poussée à l'apogée :

$$(53) \delta L_{Ak} = \frac{A_f^{-2} (e_M - e_f)}{2 n_A \gamma_{max}} \left(1 + \frac{e_{Ak} + e_o - 2 e_M}{2 W} \right) \left\{ 1 + \text{ordre max} \left[\varepsilon^2, \left(n - k + \frac{1}{2} \right) \varphi^2 \right] \right\}$$

Les angles δL_k décroissent donc en progression arithmétique de raison :

$$\frac{P_o^{-2}}{\gamma_{max} W} \left(\frac{e_M - e_o}{2 n_P} \right)^2 \quad \text{pour les arcs périgée et}$$

$$\frac{A_f^{-2}}{2 \gamma_{max} W} \left(\frac{e_M - e_f}{2 n_A} \right)^2 \quad \text{pour les arcs apogée.}$$

Dans le cas d'un système de propulsion à accélération limitée, il suffit de faire $W = \infty$ dans les formules précédentes. Les angles au centre des arcs de poussée au périgée et à l'apogée sont respectivement égaux entre eux, à l'ordre $\max(\varepsilon^2 \varphi, n \varphi^3)$ près.

Par exemple, pour un transfert à un grand nombre pair $n = 2r$ d'arcs de poussée, entre orbites circulaires, si δt_1 est la durée du premier arc propulsé et δL_1 , l'angle au centre correspondant, la durée du dernier arc périgée est $\delta t_r = \delta t_1 \left(1 - \frac{\Delta a}{4} \right)$ et l'angle correspondant $\delta L_r = \delta L_1$. La durée du premier arc apogée est $\delta t_{r+1} \simeq \delta t_r$ et l'angle correspondant $\delta L_{r+1} = \delta L_1 (1 - 2\Delta a)$. Enfin, la durée du dernier arc apogée est : $\delta t_n = \delta t_1 \left(1 - \frac{\Delta a}{2} \right)$ et l'angle correspondant $\delta L_n = \delta L_{r+1}$.

II,4.3.3. PERTE PAR RAPPORT A LA SOLUTION DE HOHMANN DANS LE CAS CIRCULAIRE.

La formule (24) chiffre la perte due à l'étalement de la poussée sur deux arcs d'accélération maximale pour un transfert entre cercles proches, par rapport à la solution bi-impulsionnelle de HOHMANN.

Nous nous proposons d'établir une formule plus générale bien que moins précise, dans le cas d'un nombre quelconque d'arcs.

La vitesse caractéristique d'une solution optimale entre cercles est donnée par :

$$(54) \quad \Delta C = -\Delta B - \frac{e_M^3}{3} + \text{ordre max}(\varepsilon^4, \varepsilon^3 \varphi^4)$$

où

$$(55) \quad e_M = 2 n_P \rho \sin \frac{\varphi_P}{2} = 2 n_A \rho \sin \frac{\varphi_A}{2}$$

avec

$$(56) \quad \rho = 2 \gamma_{max} = \frac{2 \Delta C}{n_P \varphi_P + n_A \varphi_A} = \frac{\Delta a}{n_P \varphi_P + n_A \varphi_A}$$

d'où

$$(57) \quad e_M = \frac{\Delta a}{2} \left(1 + \frac{1}{24} \frac{n_P \varphi_P^3 + n_A \varphi_A^3}{n_P \varphi_P + n_A \varphi_A} + \text{ordre } \varphi^3 \right).$$

Or, (55) montre que

$$n_P \varphi_P = n_A \varphi_A (1 + \text{ordre } \varphi^2)$$

donc

$$(58) \quad \Delta C = -\Delta B - \frac{\Delta a^3}{32} \left(1 + \frac{\varphi_P^2 + \varphi_A^2}{16} + \text{ordre } \varphi^4 \right)$$

d'où

$$(59) \quad \frac{\Delta C - \Delta C_H}{\Delta C} = \frac{\Delta a^2 (\varphi_P^2 + \varphi_A^2)}{12\delta} \left[1 + \text{ordre max}(\varepsilon, \varphi^2) \right]$$

pour $n = 2$, on retrouve bien (25).

II,4.4. SOLUTIONS QUASI-OPTIMALES.

Reprenons l'équation (10) :

$$(60) \quad -\frac{dC}{dB} = 1 + \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{e}{2} \sin v \right)^2 - \frac{3e^2}{8} (1 + \cos^2 v) + \text{ordre } M^3.$$

Pour une solution de HOHMANN entre orbites circulaires (avec, éventuellement, fractionnement des impulsions) $\varphi \equiv 0$ et $\sin v \equiv 0$ donc

$$(61) \quad -\frac{dC}{dB} = 1 - \frac{3}{4} e^2 + \text{ordre } \varepsilon^3$$

et par intégration :

$$(62) \quad -\frac{\Delta C}{\Delta B} = 1 - \frac{e_M^2}{4} + \text{ordre } \varepsilon^3 = 1 - \frac{\Delta a^2}{16} + \text{ordre } \varepsilon^3.$$

Supposons maintenant que l'orientation de la poussée soit seulement astreinte à

$$(63) \quad \left| \varphi - \frac{e}{2} \sin v \right| = \left| \varphi_B \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} e \sqrt{1 + \cos^2 v}$$

où φ_B est l'angle de la poussée avec la bissectrice de l'horizontale locale et de la tangente.

Alors, la solution la plus défavorable (c'est-à-dire conduisant à une consommation ΔC maximale, ΔB étant donné) correspond à $e \equiv 0$ (spirale) et :

$$(64) \quad -\frac{dC}{dB} = 1 + \text{ordre } M^3$$

soit, par intégration :

$$(65) \quad -\frac{\Delta C}{\Delta B} = 1 + \text{ordre } M^3$$

Donc, pour toute solution où l'orientation de la poussée satisfait à (63), la consommation ΔC diffère peu de la consommation de HOHMANN.

$$(66) \quad \Delta C_H \leq \Delta C \leq \Delta C_H \left(1 + \frac{\Delta a^2}{16} \right).$$

Cela est vrai, en particulier, si l'angle $|\varphi_B|$ de la poussée avec la bissectrice définie plus

haut est inférieur à $\min \frac{\sqrt{3}}{2} e \sqrt{1 + \cos^2 v} = \frac{\sqrt{3}}{2} e = \frac{\sqrt{3}}{2} \times$ (angle maximum entre la tangente et l'horizontale, obtenu au sommet du petit axe).

II,4.5. CONCLUSION.

Les transferts plans de durée limitée mais suffisante entre orbites quasi-circulaires proches, coaxiales, directes, non sécantes, sont réalisés de façon économique en utilisant la solution bi-impulsionnelle de HOHMANN, si la poussée du propulseur n'est pas limitée.

Si l'excentricité e de l'orbite nominale est d'ordre $\ll \varepsilon$ (= importance du transfert) c'est-à-dire pour un transfert entre *quasi-cercles* proprement dit, nous avons vu qu'il revenait au même, dans l'étude linéarisée, de la supposer nulle.

L'angle δ entre le grand axe $\vec{Ox}$ de l'orbite nominale ($\mathcal{O}$) et la ligne des nœuds (support de $\vec{\Delta j}$) n'intervient alors pas dans les calculs et le transfert peut être défini par quatre paramètres scalaires au lieu de cinq. Ces quatre paramètres sont :

la rotation Δj , la composante $\Delta e_{\parallel}$ de $\vec{\Delta e}$ parallèle à $\vec{\Delta j}$, la composante $\Delta e_{\perp}$ de $\vec{\Delta e}$ perpendiculaire à $\vec{\Delta j}$ et enfin la "dilatation relative" $\Delta a/a$ du demi-grand axe.

Par contre, si l'excentricité de l'orbite nominale est d'ordre $\gg \varepsilon$, tout en étant petite devant l'unité, c'est-à-dire dans le cas de transferts entre *orbites elliptiques de faibles excentricités*, l'angle δ intervient dans les calculs. Le transfert est alors défini par cinq paramètres.

Ces deux cas seront envisagés successivement.

Nous ne nous intéresserons (sauf cas dégénérés) qu'aux solutions *impulsionnelles* relatives aux systèmes de propulsion de type (S_1) . Ces solutions apparaissent lorsque $\lambda = \frac{\varepsilon}{\Delta L F_{max}} \ll 1$ où ΔL est l'angle de transfert et F_{max} la poussée maximale. Si le propulseur est capable de fournir des impulsions finies ($F_{max} \gg$ attraction locale), nous supposons, de plus, que l'angle de transfert ΔL est suffisamment grand pour qu'il soit possible d'utiliser la solution obtenue en faisant, dans les calculs, l'hypothèse de l'angle de transfert indifférent. Autrement dit, l'arc de transfert $\overline{\mathcal{M}_0 \mathcal{M}_f}$ doit contenir les points où sont appliquées les impulsions obtenues dans cette hypothèse (une révolution suffit dans tous les cas).

II,5.2. TRANSFERTS ENTRE ORBITES QUASI-CIRCULAIRES ($e \ll$ ordre $\varepsilon \ll 1$).

Ce problème a été étudié parallèlement par GOBETZ, WASHINGTON et EDELBAUM [48 - 49].

II,5.2.1. POUSSÉE OPTIMALE.

II,5.2.1.1. SYMÉTRIES.

La linéarisation étant faite autour d'une orbite nominale ($\mathcal{O}$) circulaire, le choix de l'axe de référence $\vec{Ox}$ est arbitraire. Ce choix ayant été fait au mieux de l'étude considérée (fig. 1), le transfert est défini par les variations $-\Delta \eta$ et $\Delta \xi$, caractérisant la rotation Δj , $\Delta \alpha$ et $\Delta \beta$ caractérisant la variation $\vec{\Delta e}$ et, enfin Δa .

Une accélération de poussée $\vec{\gamma}$, dans la direction $\vec{D}(X, Y, Z)$, au point $\mathcal{M}$ d'ascension droite L , pendant le temps dt produit les variations :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\xi = \sin L \, Z \, \gamma \, dt \\ d\eta = -\cos L \, Z \, \gamma \, dt \\ d\alpha = 2 \, Y \, \gamma \, dt \\ d\alpha = (X \sin L + 2 \, Y \cos L) \, \gamma \, dt \\ d\beta = (-X \cos L + 2 \, Y \sin L) \, \gamma \, dt \end{array} \right.$$

Dans cette étude des symétries, prenons l'axe de référence $\vec{Ox}$ selon la ligne des nœuds, support du vecteur $\vec{\Delta j}$. $d\alpha$ et $d\beta$ représentent alors respectivement $de_{\parallel}$ et $de_{\perp}$.

Si au lieu d'appliquer pendant le temps dt l'accélération de poussée ($\gamma; X, Y, Z$) au point d'ascension droite L , on l'applique au point diamétralement opposé, d'ascension droite $L + \pi$,

$\frac{d\vec{a}}{dt}$ est inchangé, par contre $\frac{d\vec{j}}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}}{dt}$ changent de sens; donc, au total, $\Delta\vec{a}$ est inchangé, par contre $\frac{d\vec{j}}{dt}$ change de sens mais $\Delta\vec{e}_{//}$ et $\Delta\vec{e}_{\perp}$ sont inchangés car $\frac{d\vec{e}}{dt}$ change également de sens.

De même, si au lieu d'appliquer l'accélération de poussée ($\gamma; X, Y, Z$) pendant le temps dt au point L , on applique l'accélération ($\gamma; -X, -Y, -Z$) au point $L + \pi$, $\frac{d\vec{a}}{dt}$ change de signe, alors que $\frac{d\vec{j}}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}}{dt}$ sont inchangés; donc, au total, $\Delta\vec{a}$ change de signe, alors que $\Delta\vec{j}$ et $\Delta\vec{e}$, donc aussi Δj , $\Delta e_{//}$ et $\Delta e_{\perp}$ sont inchangés.

Si, au lieu d'appliquer l'accélération de poussée ($\gamma; X, Y, Z$) pendant le temps dt au point L , on applique l'accélération ($\gamma; -X, Y, -Z$) au point $\pi - L$ (symétrique du premier par rapport à $\vec{Oy}$), $d\eta$, $d\alpha$ et $d\beta$ sont inchangés, alors que $d\xi$ et $d\epsilon_{//}$ changent de signe; donc, au total, $\frac{d\vec{j}}{dt}$ est inchangé (car $\frac{d\eta}{dt} = \sum \frac{d\eta}{dt} = -\frac{d\beta}{dt}$ est inchangé et $\frac{d\xi}{dt} = \sum \frac{d\xi}{dt} = 0$ reste nul), $\Delta\vec{a}$ et $\Delta\vec{e}_{\perp}$ sont inchangés alors que $\Delta\epsilon_{//}$ change de signe.

Enfin, si au lieu d'appliquer l'accélération de poussée ($\gamma; X, Y, Z$) pendant le temps dt au point L , on applique l'accélération ($\gamma; -X, Y, Z$) au point $-L$ (symétrique du premier par rapport à $\vec{Ox}$), $d\eta$, $d\alpha$, $d\epsilon_{//}$ sont inchangés, alors que $d\xi$ et $d\epsilon_{\perp}$ changent de signe; donc, au total $\frac{d\vec{j}}{dt}$ est inchangé (car $\frac{d\eta}{dt} = \sum \frac{d\eta}{dt} = -\frac{d\beta}{dt}$ est inchangé et $\frac{d\xi}{dt} = \sum \frac{d\xi}{dt} = 0$ reste nul), $\Delta\vec{a}$ et $\Delta\epsilon_{//}$ sont inchangés, alors que $\Delta\epsilon_{\perp}$ change de signe.

Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous

$\Delta\epsilon_{//}, \Delta\epsilon_{\perp}, \Delta j, \Delta\alpha$	L	X	Y	Z
$-\Delta\epsilon_{//}$	$\pi - L$	$-X$	Y	$-Z$
$-\Delta\epsilon_{\perp}$	$-L$	$-X$	Y	Z
$-\Delta j$	$\pi + L$	X	Y	Z
$-\Delta\alpha$	$\pi + L$	$-X$	$-Y$	$-Z$

Ainsi, le changement de signe d'un seul des quatre paramètres de transfert peut-il être effectué, à dépense $\Delta C = \int_{t_0}^{t_f} \gamma dt$ égale, par des modifications de la position L du point d'application de la poussée et de la direction $\vec{D}$ de la poussée.

Seuls les modules $|\Delta\epsilon_{//}|$, $|\Delta\epsilon_{\perp}|$, $|\Delta j|$, $|\Delta\alpha|$, des variations interviendront donc dans les résultats concernant le type de solution à utiliser et le domaine accessible.

II,5.2.1.2. COURBE D'EFFICACITÉ.

Les composantes non nécessairement nulles de l'adjoint cinématique $\vec{P}$ sont $p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\alpha}, p_{\epsilon}, p_{\beta}$.

Nous avons vu au § I,3.2.4. que, dans le cas d'une orbite nominale circulaire, la courbe d'efficacité ($\mathcal{P}$) est une ellipse (fig. I,3 - 6), section du cylindre elliptique (σ) [de génératrices parallèles à l'axe $\vec{MZ}$ et de base l'ellipse (ρ), centrée en ω ($X=0, Y=2p_{\alpha}, Z=0$) de grand axe $\vec{MY}$ ($a_{(\rho)} = 2p_{\epsilon}, b_{(\rho)} = p_{\epsilon}$)] et du plan (π) passant par ω .

Les solutions impulsionnelles, de durée indifférente, correspondent à une ellipse ($\mathcal{P}$) intérieure à la sphère (Σ) de centre $\mathcal{M}$ et de rayon 1 et touchant cette sphère en 1 ou 2 (ou une infinité de) points. Chaque point de contact fournit alors un point d'application $\mathcal{M}(L)$ et une direction $\vec{D} = \vec{M}\vec{P}$ de la poussée optimale, cette poussée pouvant être appliquée en une fois (une impulsion) ou en plusieurs fois au cours des révolutions successives (fractionnement de l'impulsion).

Une condition nécessaire pour assurer le contact précédent est que l'ellipse (ρ) soit entièrement à l'intérieur de (Σ), ou à la rigueur, tangente à (Σ).

La sphère (S) admettant le grand cercle (C) de (P) comme cercle principal (fig.2) est donc elle-même entièrement intérieure à (Σ) , ou à la rigueur tangente à (Σ) , ou même confondue avec (Σ) . Les points de contact $\mathcal{P}$ correspondant aux impulsions étant sur (Σ) sont donc extérieurs à (S) , ou, à la rigueur, sur (S) donc, dans le dièdre, d'arête $\overrightarrow{MY}$, de faces (π^+) et (π^-) contenant les cercles (c^+) et (c^-) , sections de la sphère (S) par le cylindre (σ) .

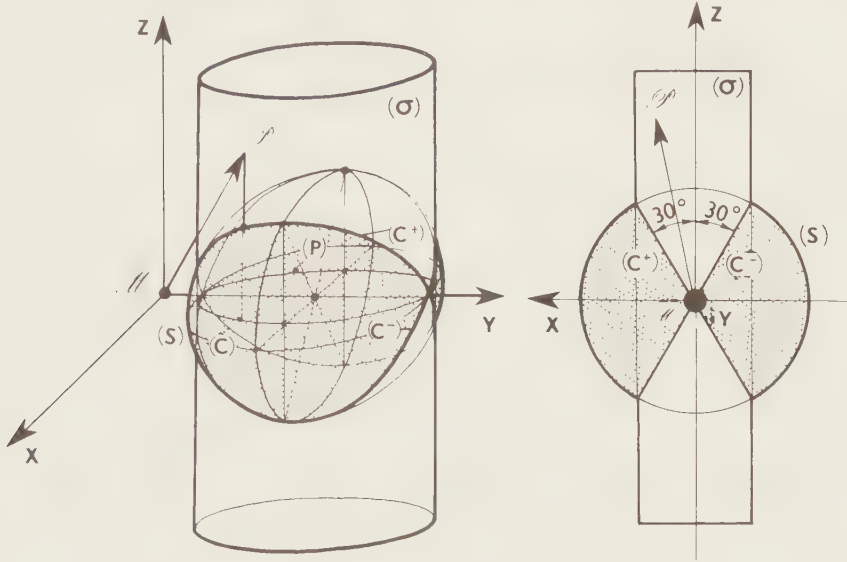


Fig. 2 - Angle spatial utile.

Une impulsion optimale, dirigée suivant $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{MP}$ est donc contenue dans l'un des deux dièdres de 60° formés par les plans (π^+) et (π^-) faisant les angles $\pm 30^\circ$ avec le plan horizontal local $X=0$. On retrouve une propriété de l' "angle spatial utile" étudié par C. MARCHAL [12].

Il est démontré au § 4 de l'Annexe 13 que toute solution mono-impulsionnelle optimale (une seule impulsion par révolution) peut être considérée, de deux façons différentes, comme limite d'une solution bi-impulsionnelle lorsque l'une des deux impulsions tend vers zéro. Nous pouvons donc nous borner au cas multi-impulsionnel.

II,5.2.1.3. LES QUATRE TYPES DE SOLUTIONS LINÉARISÉES.

(Les démonstrations figurent en Annexe 13).

Selon que :

$$(3) \quad \max \left(\Delta a^2, \Delta e_{//}^2, \Delta e_{//}^2 + \Delta e_{\perp}^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \Delta j \right| \left| \Delta e_{\perp} \right| - \Delta j^2 \right) =$$

$$\begin{cases} \Delta a^2 & I \\ \Delta e_{//}^2 & II \\ \Delta e_{//}^2 + \Delta e_{\perp}^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \Delta j \right| \left| \Delta e_{\perp} \right| - \Delta j^2 & III \end{cases}$$

la solution optimale appartient à l'un des trois types fondamentaux suivants (fig. 3) :

Type I (bi-impulsionnel).

Si ω n'est pas en $\mathcal{M}$ ($p_a \neq 0$), l'ellipse $(\mathcal{P})$ centrée en ω sur $\overrightarrow{MY}$ ne peut être bi-tangente à (Σ) en deux points $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ que si son plan (π) passe par $\overrightarrow{MY}$ ($\overrightarrow{p_e}$ et $\overrightarrow{p_z}$ colinéaires).

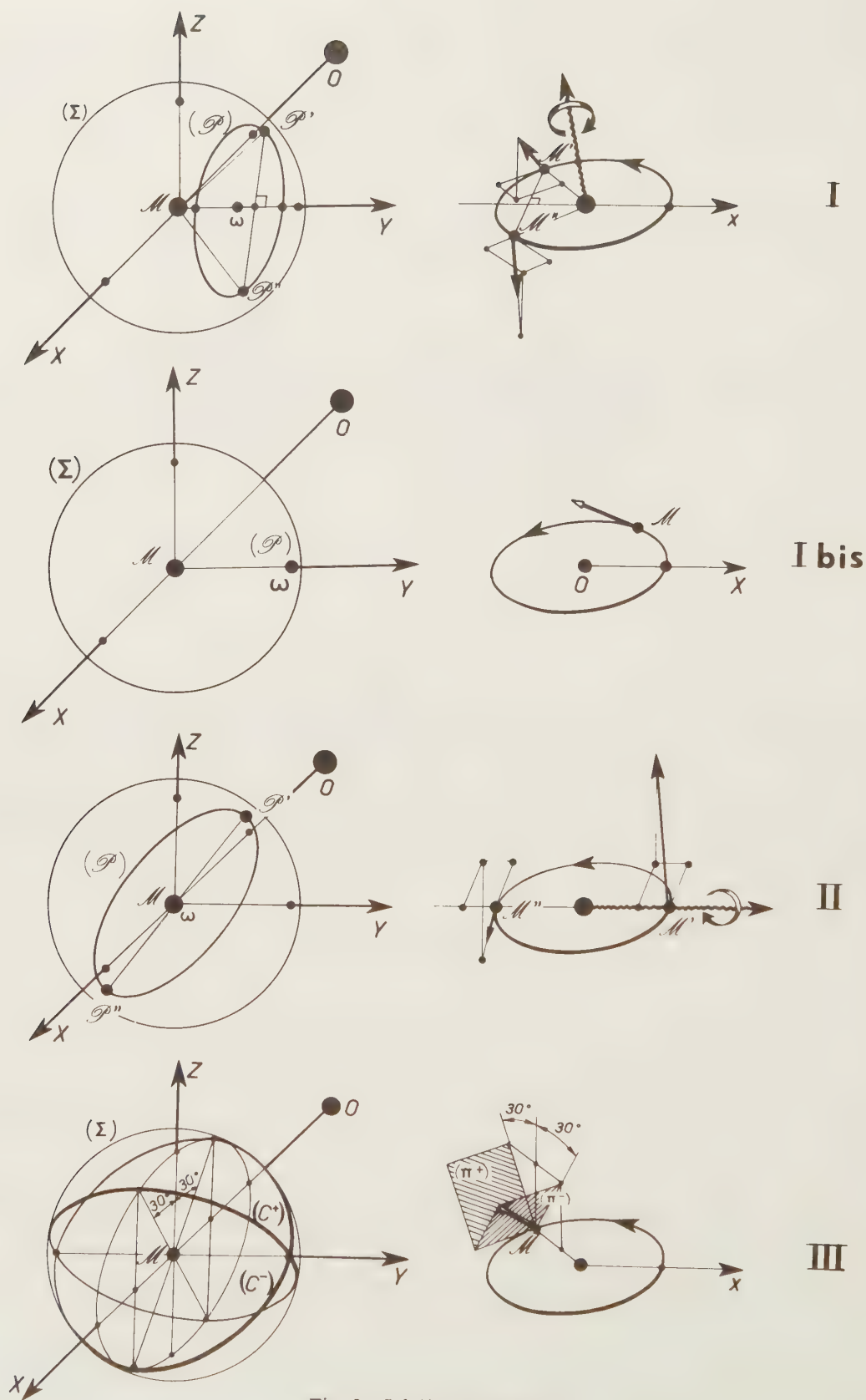


Fig. 3 - Solutions optimales.

Les deux impulsions $I' \Delta C$ et $I'' \Delta C$ sont appliquées aux points $\mathcal{M}'(L')$ et $\mathcal{M}''(L'' = -L')$ symétriques par rapport à l'axe $\vec{Ox}$ faisant l'angle $-\delta$ avec la ligne des nœuds, support du vecteur rotation $\vec{\Delta j}$.

$\operatorname{tg} \delta$ est la racine de plus grand module de l'équation du second degré :

$$(4) \quad \Delta e_{\perp} \Delta e_{\parallel}^2 \operatorname{tg}^2 \delta - (\Delta e_{\parallel}^2 - \Delta e_{\perp}^2 - \Delta a^2 - \Delta j^2) \Delta e_{\parallel} \operatorname{tg} \delta - \Delta e_{\perp} (\Delta e_{\parallel}^2 - \Delta a^2) = 0$$

et

$$(5) \quad -1 \leq \cos L' = \frac{\Delta a}{\Delta e_{\parallel}} \cos \delta \leq +1$$

$$(6) \quad -1 \leq I' - I'' = \frac{\Delta e_{\parallel}}{\Delta a} \frac{\sin L'}{\sin \delta} \leq +1$$

$$(7) \quad \chi' = -\chi'' = \frac{(\Delta e_{\parallel}^2 - \Delta a^2) \cos \delta - \Delta e_{\parallel} \Delta e_{\perp} \sin \delta}{\Delta e_{\parallel} \Delta C \sin L'}$$

$$(8) \quad \gamma' = \gamma'' = \frac{\Delta a}{2 \Delta C}$$

$$(9) \quad Z' = -Z'' = \frac{|\Delta j|}{\Delta C} \frac{\sin \delta}{\sin L'}$$

(On suppose que l'impulsion $I' \Delta C$ correspond à $\sin L' > 0$).

Si on a à la fois $p_e = 0$ et $p_a = \frac{\mathcal{E}a}{2}$ ($\mathcal{E}a = \pm 1$) l'ellipse ($\mathcal{P}$) est réduite à son centre ω sur la sphère (Σ). On obtient le cas singulier plan de type I bis déjà signalé au § I,3.2.6.

La poussée est tangentielle. Il y a dégénérescence de la solution linéarisée, car, au premier ordre, tout point de l'orbite peut convenir pour appliquer la poussée. Reprenant le raisonnement direct du § II,3.3.2.5., on voit qu'une solution dégénérée quelconque s'obtient en répartissant sur le cercle ($\mathcal{O}$)

la "masse" fictive totale $\Delta C = |\Delta a|/2$, avec la densité linéaire $F(L) \leq F_{\max}$, de façon que le centre de gravité de cette répartition soit en G tel que :

$$(10) \quad \vec{OG} = \frac{\vec{\Delta e}}{\Delta a}$$

Si $|\Delta e| \leq |\Delta a|$, cela peut toujours être réalisé, en particulier à l'aide de deux impulsions [G à l'intérieur de ($\mathcal{O}$)] ou d'une seule impulsion [G sur ($\mathcal{O}$)] (fig. 4).

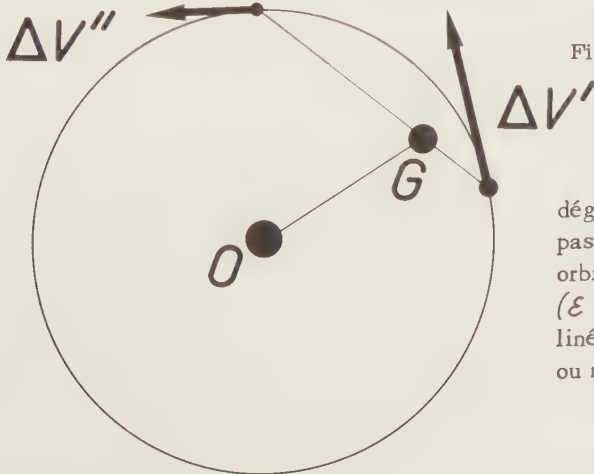


Fig. 4 - Type I bis. Solutions bi-impulsionnelles.

Nous verrons au § II,5.3.1. qu'une telle dégénérescence au premier ordre n'apparaît pas si la linéarisation est faite autour d'une orbite nominale de faible excentricité ($\mathcal{E} \ll e \ll 1$) et que les solutions linéarisées optimales sont alors mono- ou bi- ou même quelquefois tri-impulsionnelles.

Type II (bi-impulsionnel, nodal).

Si ω est en $\mathcal{M}$ ($p_a = 0$) et si l'ellipse (P) n'est pas bi-tangente à (Σ) ($p_e \neq 1/2$), les points de contact $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ de ($\mathcal{P}$) et de (Σ) correspondent à deux points $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ diamétralement opposés sur ($\mathcal{O}$) ($L'' = L' + \pi$).

Les deux impulsions $I'\Delta C$ et $I''\Delta C$ sont appliquées aux nœuds avec :

$$(11) \quad -1 \ll I' - I'' = \frac{\Delta a}{\Delta e_{//}} \ll +1$$

$$(12) \quad X' = -X'' = -\frac{\Delta e_{\perp}}{\Delta C}$$

$$(13) \quad Y' = -Y'' = \frac{\Delta e_{//}}{2\Delta C}$$

$$(14) \quad Z' = -Z'' = \frac{|\Delta j|}{\Delta C}$$

Dans les axes mobiles, les deux directions optimales d'impulsion sont opposées. Dans les axes fixes, elles sont symétriques par rapport au plan de l'orbite.

Type III (singulier, tri-dimensionnel).

Si ω est en $\mathcal{M}$ ($p_a = 0$) et si l'ellipse (P) est bi-tangente à (Σ) ($p_e = 1/2$), l'ellipse ($\mathcal{P}$) doit être nécessairement confondue avec l'un des grands cercles (C^+) ou (C^-) de la sphère (Σ), intersection de la sphère (Σ) et du cylindre (σ), situés dans les plans (π^+) ou (π^-) passant par $\overrightarrow{M\gamma}$ et faisant les angles $\pm 30^\circ$ avec le plan horizontal local $X = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{p_e}$ et $\overrightarrow{p_z}$ sont alors colinéaires et tels que :

$$(15) \quad \overrightarrow{p_z} = \pm \sqrt{3} \overrightarrow{p_e}.$$

Nous retrouvons la solution singulière de type III déjà signalée au § I,3.2.6. Il y a dégénérescence au premier ordre, tout point de l'orbite pouvant théoriquement convenir pour appliquer la poussée. La poussée optimale est contenue dans l'un des plans (π^+) ou (π^-) et sa direction est bien déterminée en fonction de la position.

Prenant le vecteur $\overrightarrow{p_e}$ comme axe origine $\overrightarrow{Ox}$:

$$(16) \quad \overrightarrow{D} \begin{cases} X = \frac{\sin L}{2} \\ Y = \cos L \\ Z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin L \end{cases}$$

L'application de la poussée $F(L)$ sur l'arc dL entourant le point $\mathcal{M}(L)$ de l'orbite ($\mathcal{O}$) et dans la direction optimale $\overrightarrow{D}$, produit les variations :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\xi = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 L F(L) dL \\ d\eta = \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \sin L \cos L F(L) dL \\ d\alpha = 2 \cos L F(L) dL \\ d\alpha = \left(2 - \frac{3}{2} \sin^2 L \right) F(L) dL \\ d\beta = \frac{3}{2} \sin L \cos L F(L) dL \\ dC = F(L) dL \end{array} \right.$$

On remarque que :

$$(18) \quad \vec{de} \pm \sqrt{3} d\vec{Z} = \vec{de} \mp \sqrt{3} d\vec{j}_1 = 2 d\vec{C}.$$

Soit, par intégration :

$$(19) \quad \vec{\Delta e} \pm \sqrt{3} \vec{\Delta Z} = \vec{\Delta e} \mp \sqrt{3} \vec{\Delta j}_1 = 2 \vec{\Delta C}$$

où $\vec{\Delta j}_1$ se déduit de $\vec{\Delta j}$ par la rotation d'axe $\vec{OZ}$ et d'angle $+\pi/2$ et où le vecteur consommation $\vec{\Delta C}$ a pour longueur ΔC et est dirigé selon $\vec{Ox}$ (c'est-à-dire $\vec{p_e}$), ce qui fixe la direction de référence $\vec{Ox}$ en fonction des éléments du transfert.

Les transferts de type III correspondant à un vecteur $\vec{\Delta C}$ fixé, donc en particulier à une vitesse caractéristique $\Delta C = |\vec{\Delta C}|$ fixée, peuvent ainsi être définis par la donnée du vecteur rotation $\vec{\Delta j}$ et de $\Delta \alpha$ [le vecteur $\vec{\Delta \alpha}$ se déduit alors de $\vec{\Delta j}$ et $\vec{\Delta C}$ par (19)], c'est-à-dire par la donnée d'un point G dans les axes :

$$x_1 = \mp \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta \eta, y_1 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta \xi, z_1 = \frac{\Delta \alpha}{2}. \quad (\text{fig. 5}).$$

En appliquant l'impulsion ΔC au point $\mathcal{M}(L)$ dans la direction optimale $\vec{D}$ on atteint un point $G \equiv V$ situé sur la fenêtre de VIVIANI (V) d'équations paramétriques :

$$(20) \quad (V) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \Delta C \sin L \cos L \\ y_1 = \Delta C \sin^2 L \\ z_1 = \Delta C \cos L \end{array} \right.$$

Avec la même vitesse caractéristique ΔC , il est possible d'atteindre tout point G à l'intérieur du volume ($\mathcal{V}$) limité par le plus petit contour convexe entourant (V), par composition d'impulsion de type V, de façon que leur somme soit égale à ΔC et que G soit le centre de gravité des points V affectés de « masses » fictives égales à la grandeur de l'impulsion en $\mathcal{M}$. Il est même possible d'envisager, à la limite, une modulation de la poussée [répartition de la « masse » ΔC sur l'orbite ($\mathcal{O}$) avec la densité linéaire $F(L) \leq F_{\max}$]. Ainsi, le centre σ du cercle (C) peut-il être atteint par application d'une poussée F constante dans la direction optimale (fig. 12).

Fig. 5 - Type III. Fenêtre de Viviani.

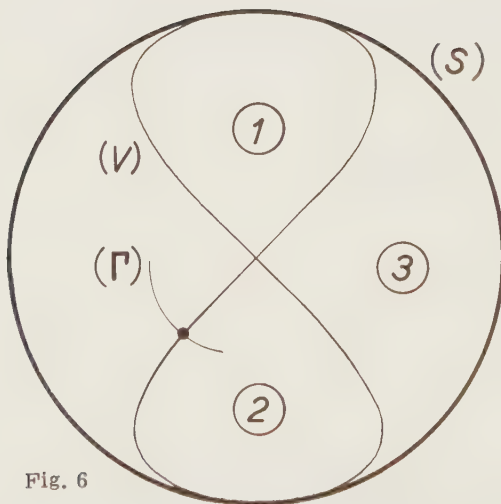
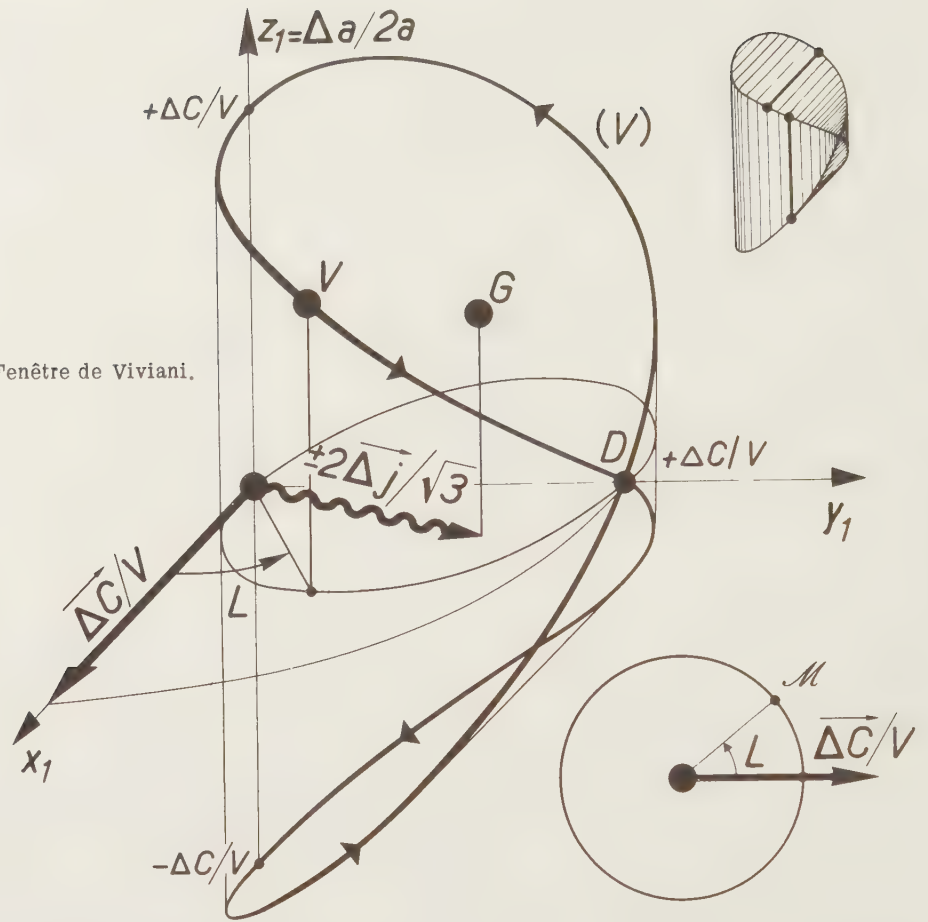


Fig. 6

Un point du cylindre droit (C_I) à base parabolique (P) ou du cylindre droit (C_{II}) à base circulaire (C) constituant la surface frontière du domaine ($\mathcal{V}$) s'obtient à l'aide de deux impulsions. Ces solutions, non dégénérées, assurent la transition avec les solutions de type I ou II.

La question se pose alors de savoir si, parmi toutes les solutions optimales dégénérées relatives à un point G à l'intérieur du volume ($\mathcal{V}$) limité par (C_I) et (C_{II}), il existe ou non des solutions bi-impulsionnelles. La réponse est affirmative : tout point G peut être obtenu par solution bi-impulsionnelle et cela de deux façons différentes.

En effet, la Fenêtre de VIVIANI (V) sépare, sur la sphère (S) sur laquelle elle est tracée, les régions

1, 2 et 3 (fig. 6). Soit G un point à l'intérieur du volume ($\mathcal{V}$). Le cône de sommet G s'appuyant sur (V) recoupe la sphère (S) suivant une courbe (Γ). Soit V un point d'intersection de (V) et de (Γ). La droite GV recoupe, par définition de (Γ), la Fenêtre de VIVIANI en V' , le point V' étant lui-même sur (Γ) puisque V est sur (V). Le segment GVV' correspond donc à une solution bi-impulsionnelle, les impulsions étant appliquées en $L(V)$ et $L'(V')$.

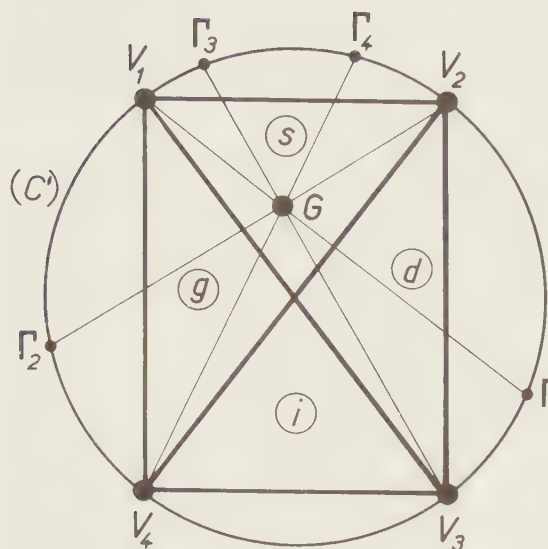


Fig. 7

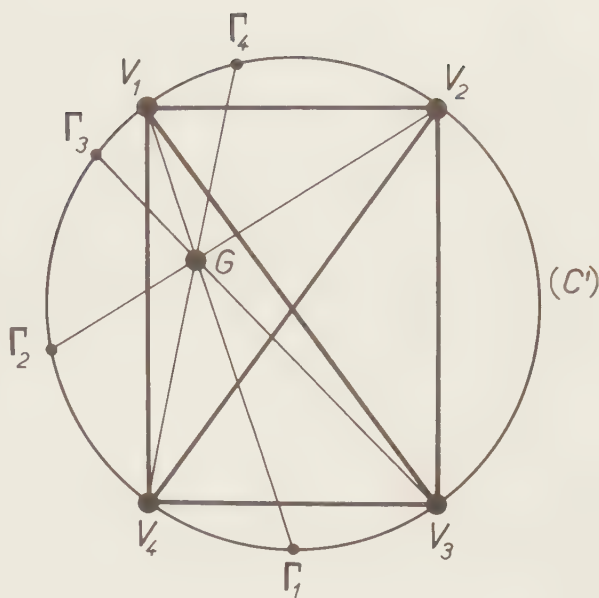


Fig. 8

Il y a donc autant de solutions bi-impulsionnelles relatives au point G que de couples VV' . Le nombre de ces solutions est donc égal au nombre des points d'intersection de (V) et (Γ') , divisé par 2.

Considérons alors la section de la figure par le plan $y_1 = C^{te}$ passant par G . Ce plan coupe la sphère (S) suivant un cercle (C') et la fenêtre (V) suivant quatre points V_1, V_2, V_3, V_4 (fig. 7).

Les diagonales $V_1 V_3$ et $V_2 V_4$ du rectangle $V_1 V_2 V_3 V_4$ séparent les régions supérieure (s) , inférieure (i) , latérales droite (d) , et gauche (g) .

Les points $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, font évidemment partie de (Γ') . Si G est dans la région (s) (fig. 7) Γ_3 et Γ_4 sont tous deux dans la région (i) , alors que Γ_1 et Γ_2 sont dans la région (s) . (Γ') étant une courbe continue, il y a alors *au moins* deux points d'intersection entre (Γ') et (V) c'est-à-dire une solution bi-impulsionnelle relative à G . Même résultat si G est dans la région (i) .

Si G est dans la région (d) ou (s) (fig. 8) on montre, de même, qu'il y a *au moins* quatre points d'intersection entre (Γ') et (V) c'est-à-dire deux solutions bi-impulsionnelles relatives à G .

Montrons maintenant qu'il y a dans tous les cas deux solutions bi-impulsionnelles et deux seulement. Il suffit pour cela de démontrer qu'il existe au moins un point G à l'intérieur de (V) qui jouit de cette propriété et que cette propriété s'étend, par continuité, à la totalité du volume (V) . Prenons pour cela G au centre σ du cercle (C) (fig. 9).

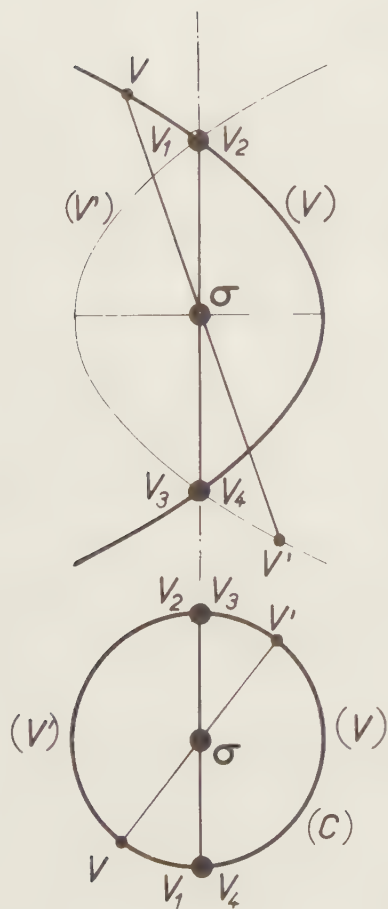


Fig. 9

Soit VV' une corde de (V) passant par σ . La projection circulaire de (V) sur le plan $z_1=0$ montre que σ doit être le milieu de VV' . Soit donc (V') la Fenêtre de VIVIANI symétrique de (V) par rapport à σ . (V) et (V') n'ont en commun que les points V_1, V_2, V_3, V_4 , comme le montre la projection sur le plan $x_1=0$. Il n'y a donc que deux solutions bi-impulsionnelles, correspondant aux couples $V_1 V_3$ et $V_2 V_4$.

Partant du point σ , supposons qu'on rencontre une frontière à l'intérieur de (V) séparant cette zone à deux solutions d'une zone à une ou trois solutions. Les courbes (V) et (V') sont alors tangentes, donc bitangentes et les tangentes aux points de contact sont coplanaires [dans le plan tangent au cône de sommet G s'appuyant sur (V)]. Ce cas ne peut se présenter, pour (V) , que si G est sur l'un des cylindres (C_I) ou (C_{II}) limitant (V) . Les deux solutions bi-impulsionnelles se confondent bien alors en une seule.

La propriété énoncée est donc démontrée. (fig. 10).



Fig. 10 - Type III.

Solutions bi-impulsionnelles.

Les longitudes L_1, L_2, L_3, L_4 , des points d'impulsion correspondant aux deux solutions bi-impulsionnelles $V_1 V_3$ et $V_2 V_4$ passant par G , sont liées par une relation indépendante de la position de G , obtenue en écrivant que les points V_1, V_2, V_3, V_4 , de la Fenêtre de VIVIANI (V) sont dans un même plan (défini par $V_1 V_3$ et $V_2 V_4$ se coupant en G). Cette relation est :

$$(21) t_1 t_2 t_3 + t_2 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_4 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$$

$$\text{où } t = t_g \frac{L}{2}.$$

REMARQUE: Nous verrons au § II,5.3.2. que la dégénérescence au premier ordre constatée pour les solutions de type III disparaît si la linéarisation est faite autour d'une orbite nominale de faible excentricité ($\epsilon \ll e \ll 1$). Les solutions optimales sont alors mono- bi- ou tri-impulsionnelles.

II,5.2.2. DOMAINE ACCESSIBLE.

Avec une vitesse caractéristique donnée ΔC , il est possible d'atteindre, dans l'espace à quatre dimensions des variations $\Delta e_{//}$, $\Delta e_{\perp}$, Δj , $\Delta \vartheta$, tous les points situés dans un certain hypervolume appelé « domaine accessible ».

Nous représenterons ce domaine par ses sections $\Delta \vartheta = C^{\text{te}}$ dans l'espace à trois dimensions $\Delta e_{//}$, $\Delta e_{\perp}$, Δj (fig. 11) réduit à l'octant $\Delta e_{//} > 0$, $\Delta e_{\perp} > 0$, $\Delta j > 0$ par les considérations de symétrie faites au début de l'étude.

Les transferts économiques correspondent évidemment aux points de la surface du domaine accessible.

La surface du 4^{ème} degré CFNMC (fig. 11 b) d'équation :

$$(22) \left(-\Delta e_{//}^2 + \frac{3}{4} \Delta \vartheta^2 + \Delta C^2 \right) \left(\Delta e_{\perp}^2 + \Delta j^2 + \frac{\Delta \vartheta^2}{4} - \Delta C^2 \right) + \Delta e_{\perp}^2 \left(\Delta e_{//}^2 - \Delta \vartheta^2 \right) = 0$$

correspond aux solutions de type I.

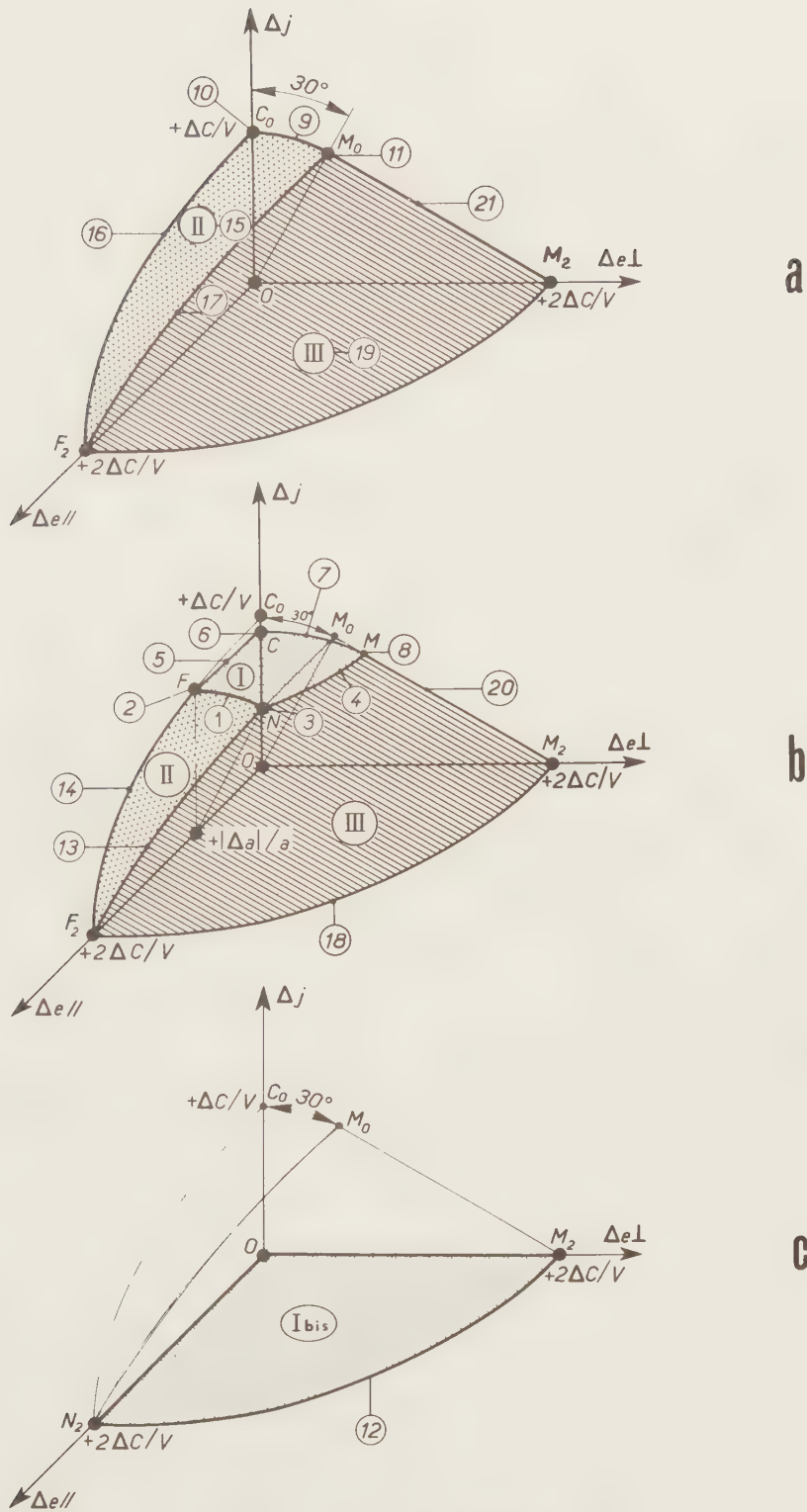


Fig. 11 - Domaine accessible.

(a) : $\Delta a = 0$ (b) : $0 < |\Delta a| < 2 \Delta C$ (c) : $|\Delta a| = 2 \Delta C$.

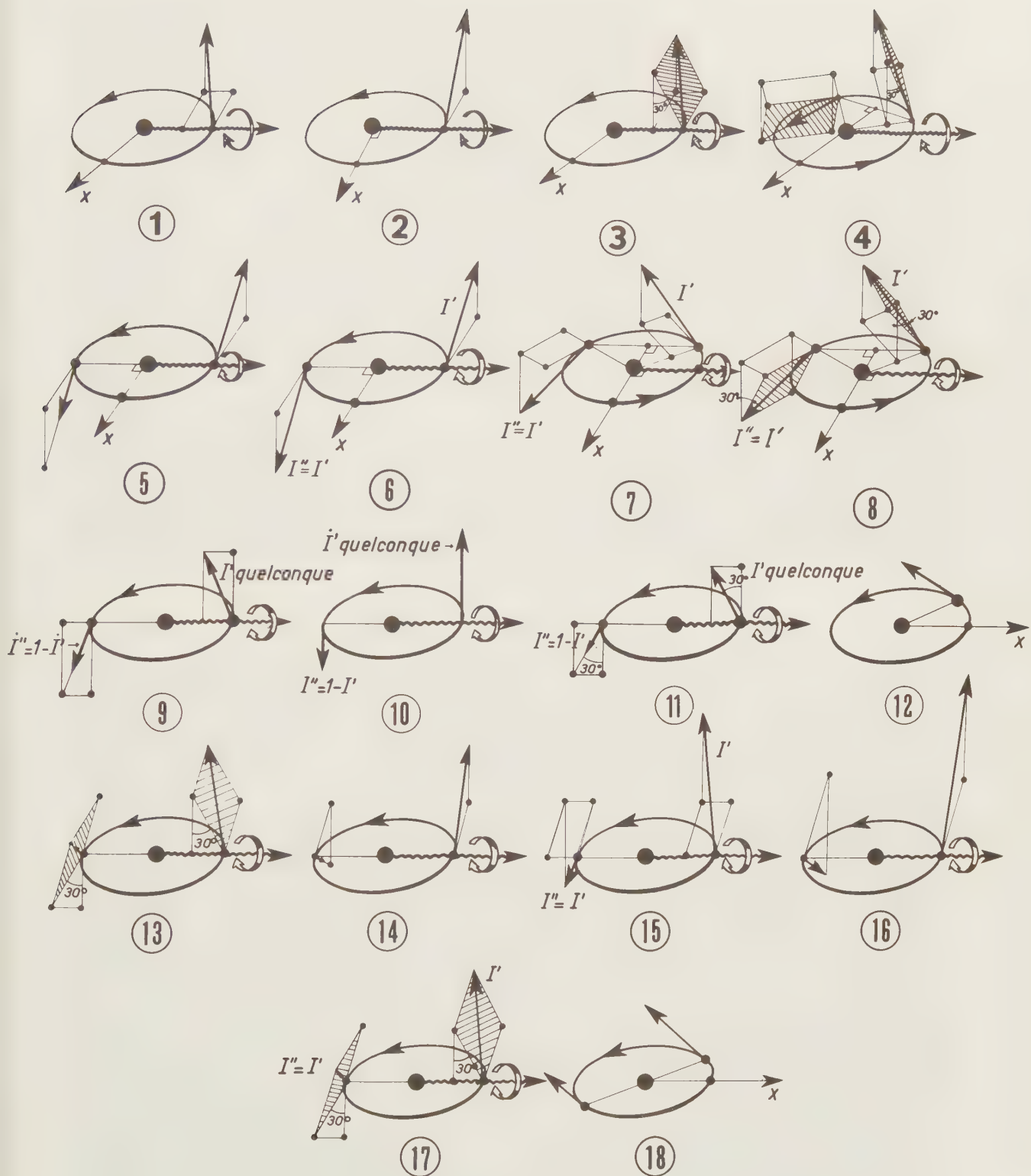


Fig. 13 - Solutions particulières.

La partie FNF_2F de l'ellipsoïde de révolution

$$(23) \quad \frac{\Delta e_{\parallel}^2}{4} + \Delta e_{\perp}^2 + \Delta j^2 = \Delta C^2$$

d'axe de révolution $\overrightarrow{\text{OF}_2}$, correspond aux solutions de type II.

Enfin, la partie $\text{F}_2\text{NMM}_2\text{F}_2$ du cylindre elliptique :

$$(24) \quad \frac{\Delta e_{\parallel}^2}{4} + \left(\frac{|\Delta e_{\perp}|}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} |\Delta j| \right)^2 = \Delta C^2$$

s'appuyant sur l'ellipsoïde (II) correspond aux solutions de type III.

Sur la figure 14 la relation vectorielle (19) est mise en évidence.

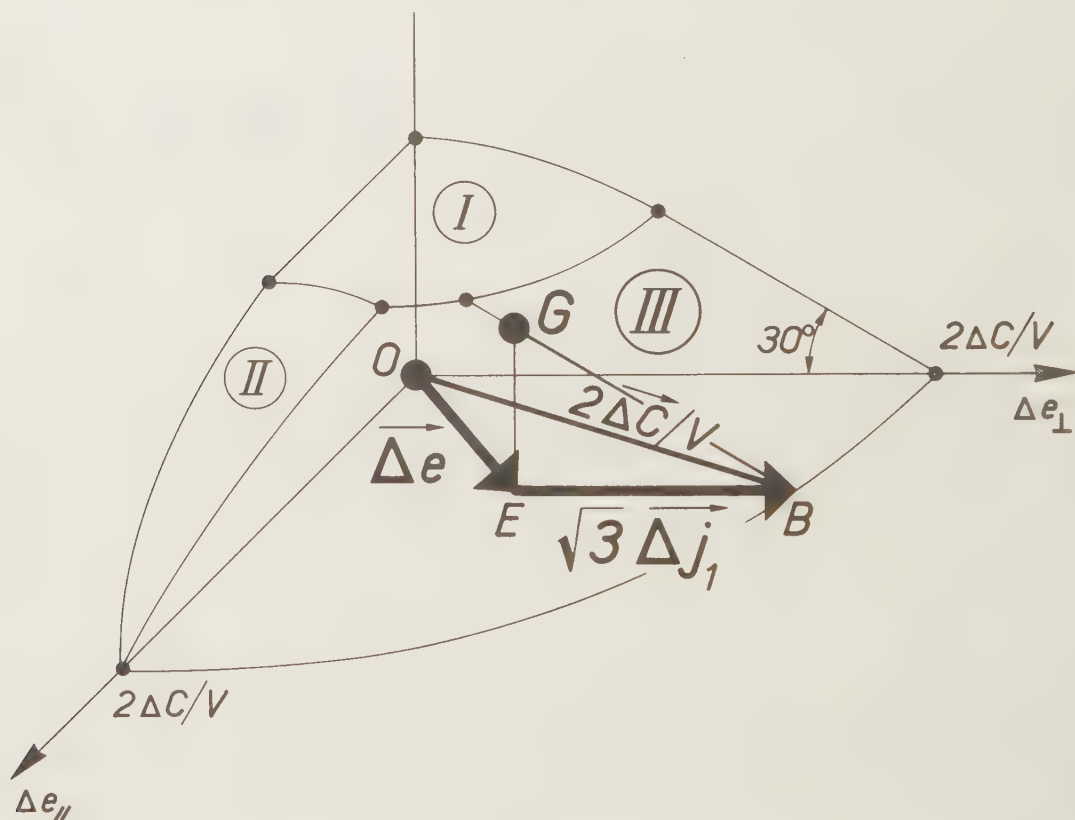


Fig. 14 - Type III. Vecteur consommation $\overrightarrow{\Delta C}$.

Lorsque la dilatation relative $|\Delta a|$ du demi-grand axe varie de 0 à $2\Delta C$, la portion correspondant aux solutions de type I croît de l'arc de cercle $\widehat{C_0 M_0}$ (fig. 11 a) au secteur circulaire $\text{ON}_2\text{M}_2\text{O}$ (fig. 11 c - type I bis). Les surfaces relatives aux solutions de type II et III restent fixes, seule leur superficie diminue (fig. 15, 16, 17, 18).

Les solutions correspondant aux numéros portés sur les figures 11 et 12 sont décrites sur la figure 13.

Donnons, pour fixer les ordres de grandeur, deux exemples volontairement très simples, correspondant à deux points particuliers du « domaine accessible » (fig. 19).

Soit une orbite circumterrestre circulaire à 500 km d'altitude.

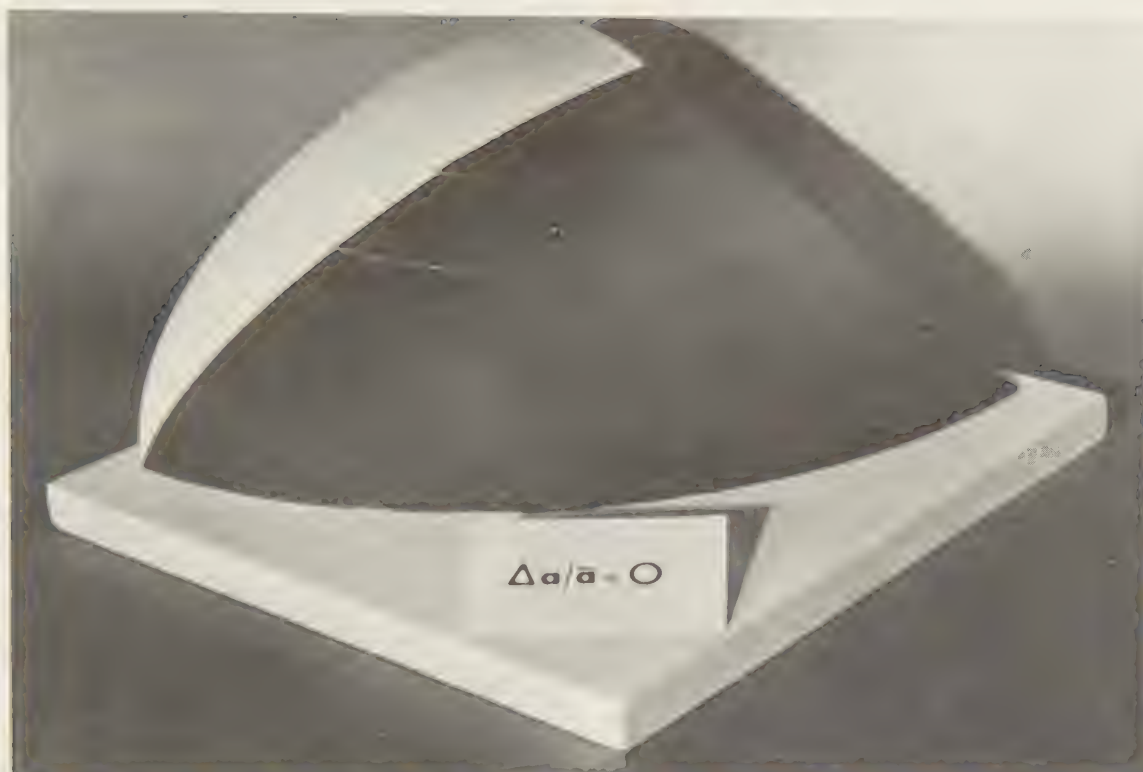


Fig. 15 - Domaine accessible $\Delta a = 0$.



Fig. 16 - Domaine accessible $|\Delta a| / \bar{a} = \Delta C / V$.

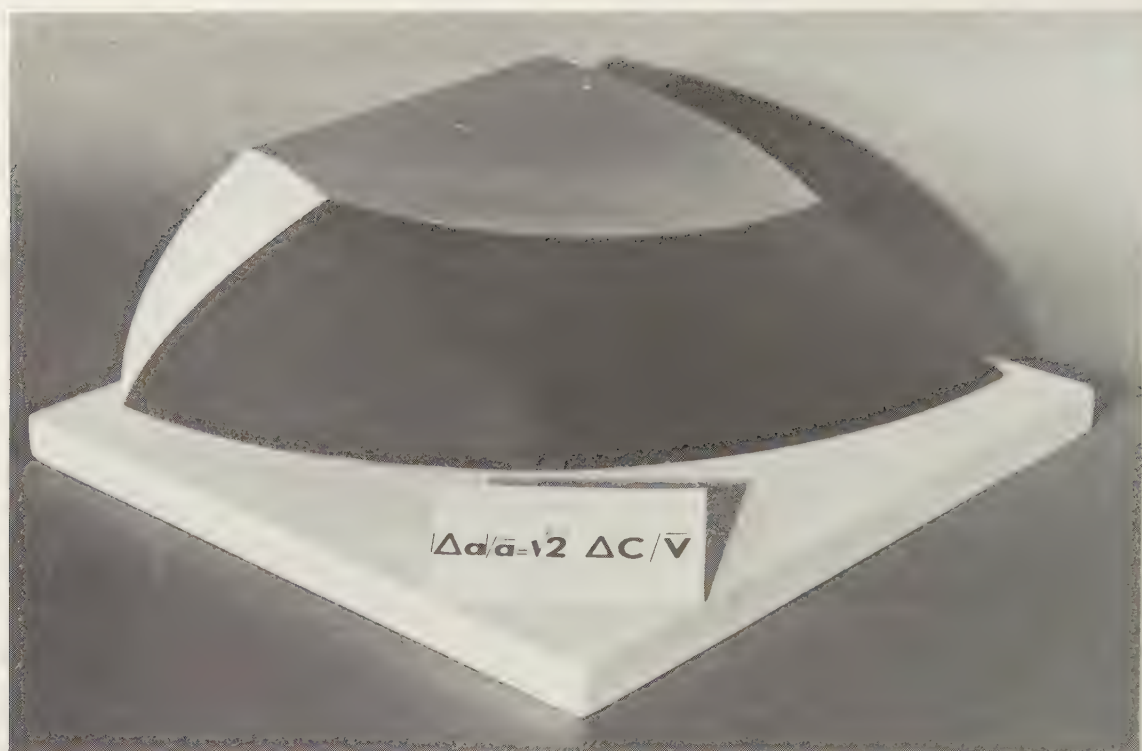


Fig. 17 - Domaine accessible $|\Delta a|/\bar{a} = \sqrt{2} \Delta C/\bar{V}$.

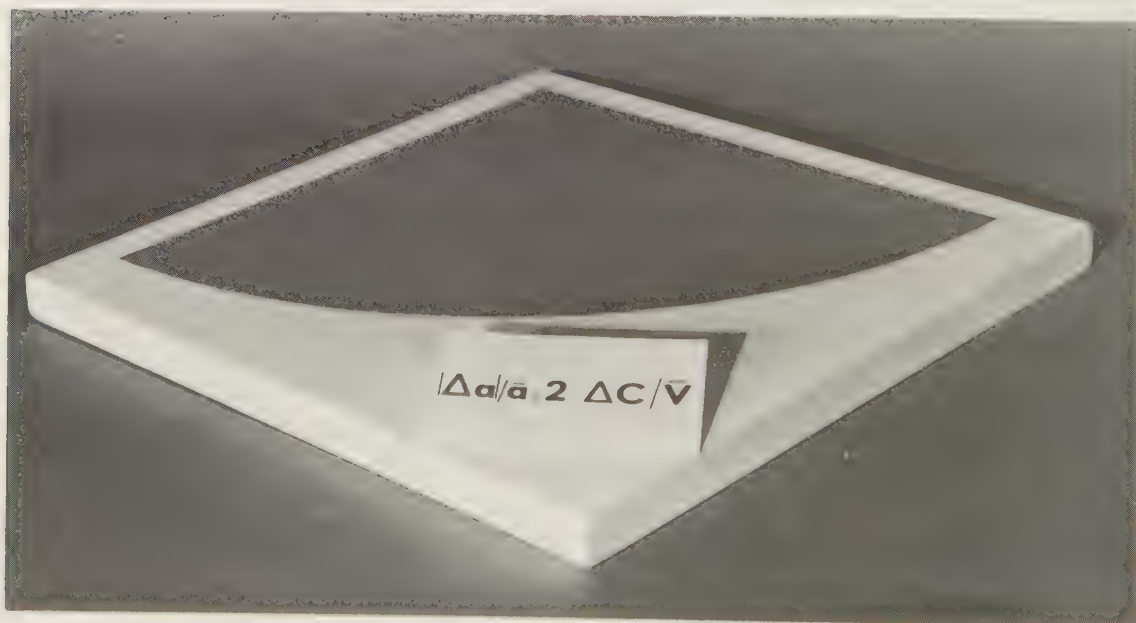


Fig. 18 - Domaine accessible $|\Delta a|/\bar{a} = 2 \Delta C/\bar{V}$.

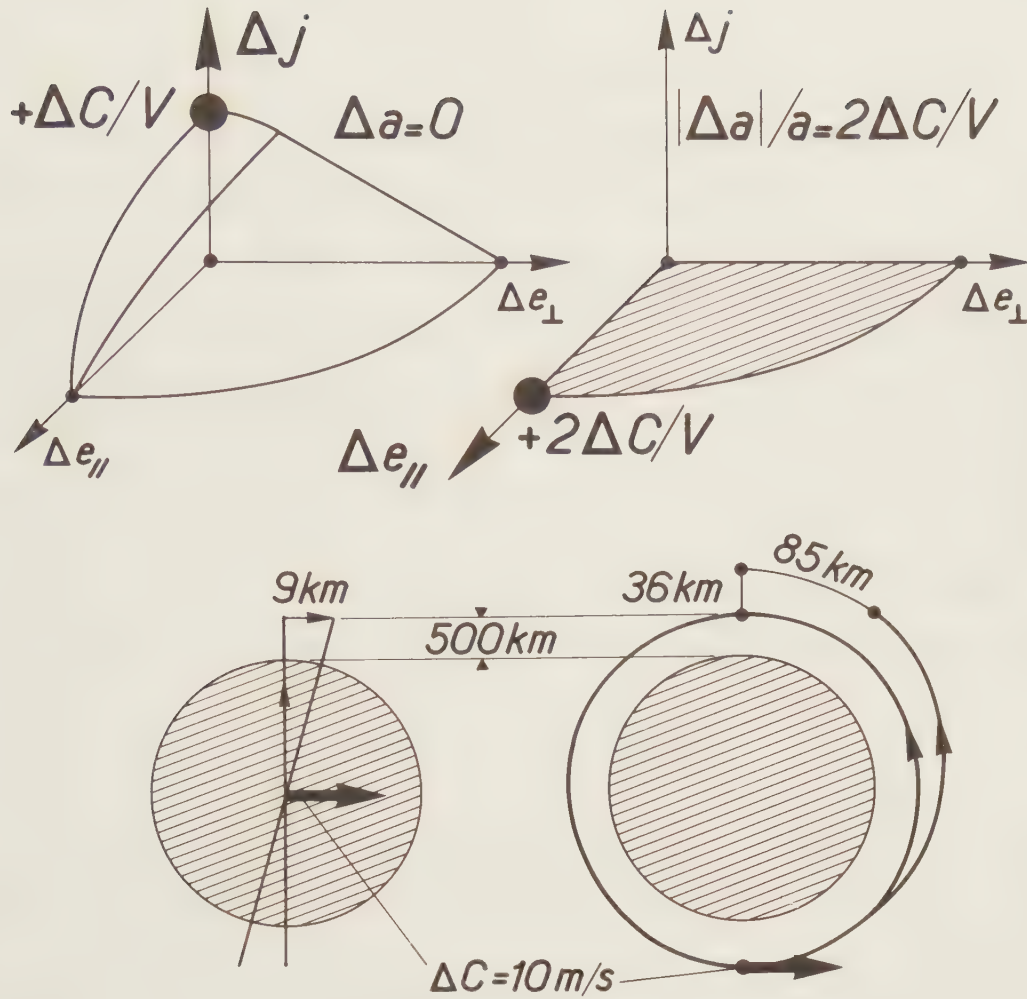


Fig. 19 - Exemples.

Une impulsion ΔC de 10 m/s perpendiculaire au plan de l'orbite produit un écart latéral de 9 km au bout d'un quart de révolution.

La même impulsion, appliquée tangentielle vers l'avant, produit au bout d'une demi-révolution un gain d'altitude de 36 km accompagné d'un retard longitudinal de 85 km.

II,5.2.3. CONCLUSION.

Les transferts optimaux entre orbites quasi-circulaires proches, coplanaires ou non, dont l'excentricité est du même ordre de grandeur que l'importance du transfert, peuvent toujours, au premier ordre, être réalisés avec deux impulsions seulement (exceptionnellement une impulsion). Dans certains cas dégénérés, une plus grande liberté est laissée dans le choix de la solution optimale.

Seule une étude aux ordres supérieurs permet de déterminer le nombre exact d'impulsions nécessaire pour réaliser le transfert optimal. BREAKWELL [16] a démontré qu'au voisinage de l'arc $\widehat{C_0 M_0}$ de la figure 11 a, il existe une zone correspondant à des solutions tri-impulsionnelles. L'étude au second ordre des solutions de types I bis et III doit également pouvoir être abordée.

Nous nous contenterons, au paragraphe suivant, de l'étude linéarisée de ces solutions dans le cas

d'orbites elliptiques de faible excentricité et non plus de quasi-cercles.

II,5.3. TRANSFERTS ENTRE ORBITES ELLIPTIQUES DE FAIBLE EXCENTRICITÉ ($\varepsilon \ll e \ll 1$).

L'étude des solutions impulsionnelles voisines des solutions des types I et II obtenues au § II,5.2. dans le cas où la linéarisation était faite autour d'un cercle ($e = 0$), conduirait ici à des résultats qualitativement semblables à ceux déjà rencontrés et ne différant de ces derniers que de quantités de l'ordre de ε .

Par contre, l'étude des solutions impulsionnelles voisines des solutions des types I bis et III (dégénérées au premier ordre dans le cas où la linéarisation était faite autour d'un cercle) est intéressante car elle conduit à des résultats qualitativement très différents (disparition de la dégénérescence au premier ordre). Nous nous bornerons donc à cette étude.

Le choix des axes est indiqué sur la figure 1. $\vec{Ox}$ est cette fois dirigé vers le périégée P de l'orbite nominale ($\mathcal{O}$).

Il s'introduit ici un paramètre de transfert supplémentaire : c'est l'angle δ entre le grand axe $\vec{Ox}$ de l'orbite nominale et la ligne des nœuds Δ_j .

II,5.3.1. SOLUTIONS VOISINES DES SOLUTIONS DE TYPE I bis.

Comme dans le chapitre II,4. nous utiliserons au lieu de la composante d'état $\mathcal{A}$, la composante d'état :

$$(25) \quad B = \sqrt{\frac{\mu}{b}} \quad (\text{ici } \mu = 1)$$

où b est le demi-petit axe.

L'accélération de poussée $\vec{\gamma}$ appliquée au point $\mathcal{M}$ dans la direction $\vec{D}$ produit la variation :

$$(26) \quad dB = -\frac{1}{2} (1 - e^2)^{-3/4} \left\{ e \sin v \vec{X} + [2 + e(\cos v - \cos u)] \vec{Y} \right\} \cdot \vec{D} \gamma dt = \vec{K} \cdot \vec{D} \gamma dt.$$

Dans l'expression du vecteur efficacité $\vec{p}_V$, le terme $2p_\beta \vec{V}$ doit être remplacé par $p_\beta \vec{K}$. Les expressions de $\vec{r}$ et $\vec{V}$ sont plus compliquées à cause du fait qu'à présent α est $\neq 0$.

Les solutions voisines des solutions de type I bis sont obtenues dans le cas $\varepsilon \ll e \ll 1$ pour un adjoint cinématique $\vec{P}$ voisin de celui relatif au cas I bis étudié pour $e = 0$.

Posons donc :

$$(27) \quad P = [p_\xi, p_\eta, p_B = \varepsilon_B + \delta p_B, p_\alpha, p_\beta]$$

où $\varepsilon_B = \pm 1$ et où $|\delta p_B|, |p_\alpha|, |p_\beta|, |p_\xi|, |p_\eta|$ sont $\ll 1$.

Nous poserons :

$$(28) \quad M = \max \left(|\delta p_B|, |p_\alpha|, |p_\beta|, |p_\xi|, |p_\eta|, e \right).$$

Le « vecteur efficacité » $\vec{p}_V$ a pour composantes :

$$(29) \quad \vec{p}_V \begin{cases} X = p_\alpha \sin L - p_\beta \cos L - \frac{\varepsilon_B}{2} e \sin L + \text{ordre } M^2 \\ Y = -\varepsilon_B - \delta p_B + 2p_\alpha \cos L + 2p_\beta \sin L - \frac{\varepsilon_B}{4} e^2 (1 + 2 \cos^2 L) \\ \quad + p_\alpha e \sin^2 L - p_\beta e \sin L \cos L + \text{ordre } M^3 \\ Z = -p_\eta \cos L + p_\xi \sin L + \text{ordre } M^2 \end{cases}$$

La direction de poussée optimale $\vec{D} = \vec{MP}$ s'éloigne donc peu de l'axe $\vec{MY}$. D'autre part :

$$(30) \quad \begin{aligned} \vec{p}_V^2 &= 1 - 2 \varepsilon_B (-\delta p_B + 2 p_\alpha \cos L + 2 p_\beta \sin L) + \text{ordre } M^2 \\ &1 - 2 \varepsilon_B [-\delta p_B + 2 p_e \cos(L - L_e)] + \text{ordre } M^2 \end{aligned}$$

en posant, comme d'habitude :

$$(31) \quad \begin{cases} p_\alpha = p_e \cos L_e \\ p_\beta = p_e \sin L_e \end{cases} \quad (p_e = |\vec{p}_e| \geq 0)$$

a) Si $p_e \gg M^2$, $\vec{p}_V^2$ n'admet la valeur 1 comme maximum que pour $L = L_e + \text{ordre } M$ et à condition que $\delta p_B = 2 p_e + \text{ordre } M^2$. Il n'y a qu'une seule impulsion par révolution, ce qui restreint la solution au cas des orbites sécantes. La solution n'est donc pas générale.

b) Nous supposons donc que $|\delta p_B|$ et p_e sont d'ordre M^2 . Alors :

$$(32) \quad \vec{p}_V^2 = 1 + \frac{3e^2}{4} (1 + \cos^2 L) - 2 \varepsilon_B [-\delta p_B + 2 p_B \cos(L - L_e)] + p_z^2 \sin^2(L - L_z) + \text{ordre } M^3$$

en posant :

$$(33) \quad \begin{cases} p_\xi = p_z \cos L_z \\ p_\eta = p_z \sin L_z \end{cases} \quad (p_z = |\vec{p}_z| \geq 0)$$

L'équation (32) s'écrit encore :

$$(34) \quad \vec{p}_V^2 = 1 + \lambda + \mu \cos(L - L_e) + \nu \cos 2(L - w) + \text{ordre } M^3$$

avec

$$(35) \quad \lambda = \frac{9e^2}{8} + 2 \varepsilon_B \delta p_B + \frac{p_z^2}{2}$$

$$(36) \quad \mu = -4 \varepsilon_B p_e$$

$$(37) \quad \begin{cases} \nu \cos 2w = \frac{3}{8} e^2 - \frac{p_z^2}{2} \cos 2L_z \\ \nu \sin 2w = -\frac{p_z^2}{2} \sin 2L_z \end{cases} \quad (\nu > 0)$$

$\vec{p}_V^2$ n'admet la valeur 1 comme maximum pour deux valeurs L' et L'' de L que si cette quantité est de la forme :

$$(38) \quad \vec{p}_V^2 = 1 - k [1 - \cos(L - L')] [1 - \cos(L - L'')] + \text{ordre } M^3$$

expression qui dépend des trois paramètres $k > 0$, L' , L'' . D'où les deux conditions de compatibilité entre les cinq paramètres λ , μ , ν , L_e , w , figurant dans (34) :

$$(39) \quad w - L_e = (2p + 1) \frac{\pi}{2} + \text{ordre } M$$

$$(40) \quad \lambda = -\left(\frac{\mu^2}{8\nu} + \nu\right) + \text{ordre } M^3$$

et l'inéquation :

$$(41) \quad \nu > \frac{\mu}{4} + \text{ordre } M^3$$

traduisant $k > 0$.

Les points d'application des impulsions sont alors donnés par :

$$(42) \quad \left. \begin{matrix} L' \\ L'' \end{matrix} \right\} = L_e \pm \text{Arc cos } \frac{\mu}{4\nu} + \text{ordre } M.$$

Leurs ascensions droites sont quasi-symétriques par rapport à L_e .

Les solutions bi-impulsionnelles ainsi obtenues sont d'un type général, contrairement aux solutions mono-impulsionnelles rencontrées précédemment puisqu'on dispose de sept paramètres ($p_\xi, p_\eta, \delta p_B, p_\alpha, p_\beta$ et les grandeurs $I'\Delta V$ et $I''\Delta C$ des deux impulsions) réduits à cinq paramètres indépendants par les deux relations (39) et (40), pour réaliser les cinq variations des éléments de l'orbite.

Les directions optimales des impulsions sont données par :

$$(43) \quad \vec{p}_V \begin{cases} X = -\frac{\varepsilon_B}{2} e \sin L + \text{ordre } M^2 \\ Y = -\varepsilon_B - \delta p_B + 2p_e \cos(L - L_e) - \frac{\varepsilon_B e^2}{4} (1 + 2 \cos^2 L) + \text{ordre } M^3 \\ Z = p_z \sin(L - L_z) + \text{ordre } M^2 \end{cases}$$

1/ Si $p_z \gg e$ (donc $M = p_z$), on déduit de (35) et (37) :

$$(44) \quad \nu \simeq \frac{p_z^2}{2} > 0$$

$$(45) \quad w \simeq L_z \pm \frac{\pi}{2}$$

$$(46) \quad \lambda \simeq 2\varepsilon_B \delta p_B + \frac{p_z^2}{2}.$$

Les conditions de compatibilité (39) - (41) s'écrivent alors :

$$(47) \quad p_z^2 > -2\varepsilon_B p_e$$

$$(48) \quad L_e \simeq L_z + q\pi \quad (q \text{ entier}).$$

Les vecteurs $\vec{p}_e$ et $\vec{p}_z$ sont donc colinéaires.

$$(49) \quad \varepsilon_B \delta p_B \simeq - \left(2 \frac{p_e^2}{p_z^2} + p_z^2 \right) < 0.$$

Les deux impulsions sont appliquées aux points :

$$(50) \quad \left. \begin{matrix} L' \\ L'' \end{matrix} \right\} \simeq L_e \pm \text{Arc cos } \left(-2\varepsilon_B \frac{p_e}{p_z^2} \right)$$

symétriques par rapport à $\vec{p}_e$ et $\vec{p}_z$.

En particulier, pour $p_e \ll p_z^2$, les deux impulsions sont diamétralement opposées :

$$(51) \quad \left. \begin{matrix} L' \\ L'' \end{matrix} \right\} \simeq L_e + \frac{\pi}{2}$$

et

$$(52) \quad \varepsilon_B \delta p_B \simeq -p_z^2 < 0.$$

Les solutions bi-impulsionnelles ainsi obtenues pour $p_z \gg e$ pourraient être appelées de type I, par analogie avec l'étude du § II,5.2.1.3.

2/ Si, au contraire, $p_z \ll e$ (donc $M = e$), nous obtenons par (35) et (37) :

$$(53) \quad w \simeq k \frac{\pi}{2}$$

$$(54) \quad v \simeq (-1)^k \frac{3}{8} e^2 > 0 \text{ donc } k = 2q \text{ et } w \simeq q\pi$$

$$(55) \quad \lambda \simeq \frac{9}{8} e^2 + 2 \varepsilon_B \delta p_B.$$

Les conditions de compatibilité (39) - (41) s'écrivent alors :

$$(56) \quad \frac{3}{8} e^2 > -\varepsilon_B p_e$$

$$(57) \quad L_e \simeq (2r+1) \frac{\pi}{2}$$

$$(58) \quad \varepsilon_B \delta p_B \simeq -\left(\frac{8}{3} \frac{p_e^2}{e^2} + \frac{3e^2}{4} \right) < 0.$$

Les deux impulsions sont appliquées aux points :

$$(59) \quad \left. \begin{matrix} L' \\ L'' \end{matrix} \right\} \simeq (2r+1) \frac{\pi}{2} \pm \text{Arc cos } \frac{8\varepsilon_B p_e}{3e^2}.$$

symétriques par rapport au petit axe*.

En particulier, pour $p_e \ll e^2$, les deux impulsions sont diamétralement opposées et appliquées au périgée et à l'apogée de l'orbite, et :

$$(60) \quad \varepsilon_B \delta p_B \simeq -\frac{3}{4} e^2 < 0.$$

Les solutions ainsi obtenues pour $p_z \ll e$ pourraient être appelées de type I bis, par analogie avec l'étude du § II,5.2.1.3., bien qu'ici il n'y ait plus dégénérescence de la solution linéarisée.

c) L'équation (34) montre que des solutions à trois impulsions, ou plus, ne peuvent se présenter que si λ , μ et ν sont simultanément d'ordre M^3 , tout en respectant la définition

* Noter que pour $p_z = 0$ (cas coplanaire) on retrouve la commutation φ_s [13]. La commutation φ_i se retrouve dans le type II plan.

$M = \max(\rho_z, e)$. Cela n'est possible que si :

$$(61) \quad L_z = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} + \text{ordre } M \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} L_z \\ p_z \end{matrix}} \right\} \text{ ce qui assure } \mathcal{V} = \text{ordre } M^3$$

$$(62) \quad p_z = \frac{\sqrt{3}}{2} e + \text{ordre } M^2$$

$$(63) \quad \varepsilon_B \delta p_B = -\frac{3}{4} e^2 + \text{ordre } M^3$$

$$(64) \quad p_e = \text{ordre } M^3$$

La direction d'impulsion est alors telle que :

$$(65) \quad \frac{Z}{X} = \mp \varepsilon_B \sqrt{3} + \text{ordre } M.$$

Cette direction est donc approximativement contenue dans l'un des plans (π^+) ou (π^-) passant par $\overrightarrow{MY}$ et faisant les angles $\pm 30^\circ$ avec le plan horizontal local.

Ces solutions, d'un type nouveau, ne seront pas étudiées en détail.

II,5.3.2. SOLUTIONS VOISINES DES SOLUTIONS DE TYPE III.

Ces solutions sont obtenues dans le cas $\varepsilon \ll e \ll 1$ pour un adjoint cinématique $\vec{P}$ voisin de celui relatif au cas III étudié pour $e = 0$.

$$(66) \quad \vec{P} \left\{ \begin{array}{l} \rho_{\xi} = \rho_z \cos L_z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \delta p_z \right) \cos L_z \\ \rho_{\eta} = \rho_z \sin L_z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \delta p_z \right) \sin L_z \\ \rho_a \\ \rho_{\alpha} = p_e \cos L_e = \left(\frac{1}{2} + \delta p_e \right) \cos L_e \\ \rho_{\beta} = p_e \sin L_e = \left(\frac{1}{2} + \delta p_e \right) \sin L_e \end{array} \right.$$

L'orbite nominale ($\mathcal{O}$) n'étant plus circulaire, il n'est plus possible d'imposer a priori $\rho_{\beta} = 0$ c'est-à-dire $L_e = 0$ avec le choix d'axes indiqué sur la figure I,3. - 1.

Nous poserons :

$$(67) \quad L_z = L_e + \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} + \delta L \text{ selon que (signe } \Delta e_1) = \begin{cases} - \\ + \end{cases}$$

où $\delta L = 0$ pour les solutions de type III du cas $e = 0$.

Nous poserons également :

$$(68) \quad M = \max(e, |\rho_a|, |\delta p_e|, |\delta p_z|, |\delta L|)$$

Le «vecteur efficacité» a alors pour composantes :

$$(69) \quad \vec{P}_V \begin{cases} X = \frac{1}{2} \sin(L - L_e) + \delta p_e \sin(L - L_e) + \text{ordre } M^2 \\ Y = \cos(L - L_e) + \frac{e}{2} \sin L \sin(L - L_e) + 2\delta p_e \cos(L - L_e) + \text{ordre } M^2 \\ Z = \pm \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(L - L_e) - \frac{\sqrt{3}}{2} e \cos L \sin(L - L_e) + \delta p_z \sin(L - L_e) \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{3}}{2} \delta L \cos(L - L_e) + \text{ordre } M^2 \right] \end{cases}$$

La direction de poussée optimale est située (à l'ordre M près) dans l'un des plans (π^+) ou (π^-) passant par $\vec{M}\vec{Y}$ et faisant les angles $\pm 30^\circ$ avec le plan horizontal local $X=0$ ($\pm = -$ signe Δe_L).

Cette direction est confondue avec $\vec{M}\vec{Y}$ (à l'ordre M près) pour $L = L_e$ et $L = L_e + \pi$.

D'autre part :

$$(70) \quad \vec{P}_V^2 = 1 + \lambda + \mu \cos(w - w_1) + \nu \cos 2(w - w_2) + \frac{e}{8} \cos(3w + L_e) + \text{ordre } M^2$$

en posant :

$$(71) \quad \boxed{w = L - L_e}$$

$$(72) \quad \lambda = \frac{5}{2} \delta p_e + \frac{\sqrt{3}}{2} \delta p_z$$

$$(73) \quad \begin{cases} \mu \cos w_1 = 4 p_a - \frac{e}{8} \cos L_e \\ \mu \sin w_1 = \frac{11}{8} e \sin L_e \end{cases} \quad (\mu > 0)$$

$$(74) \quad \begin{cases} \nu \cos 2 w_2 = \frac{3}{2} \delta p_e - \frac{\sqrt{3}}{2} \delta p_z \\ \nu \sin 2 w_2 = -\frac{3}{4} \delta L \end{cases} \quad (\nu > 0)$$

La donnée des cinq paramètres p_a , δp_e , L_e , δp_z , δL est équivalente à la donnée des cinq paramètres λ , μ , ν , w_1 , w_2 .

a) Si e , $|\delta L|$ et $|\sqrt{3} \delta p_a - \delta p_z|$ sont $\ll M$ (et donc $\nu \ll M$), par exemple si ces paramètres sont d'ordre M^2 , $\vec{P}_V^2$ ne peut admettre la valeur 1 comme maximum que pour une seule valeur de w :

$$(75) \quad w = w_1 + \text{ordre } M = \text{ordre } M.$$

à condition que :

$$(76) \quad \lambda + \mu = \frac{5}{2} \delta p_e + \frac{\sqrt{3}}{2} \delta p_z + 4 |p_a| + \text{ordre } M^2 = \text{ordre } M^2.$$

Ces solutions mono-impulsionnelles ne sont pas d'un type général (orbites sécantes). On pourrait les appeler solutions de type (3) ("point triple" N) par analogie avec l'étude du § II,5.2.1.3. (fig. 11 b).

b) Si $e \ll M$ (par exemple $e = \text{ordre } M^2$) et si, de plus, les conditions :

$$(77) \quad \nu > \frac{\mu}{4} + \text{ordre } M^2 \quad \text{c.a.d.} \quad \nu > |p_a| + \text{ordre } M^2$$

$$(78) \quad w_2 - w_1 = (2p+1) \frac{\pi}{2} + \text{ordre } M \quad \text{c.a.d.} \quad w_2 = (2p+1) \frac{\pi}{2} + \text{ordre } M$$

$$(79) \quad \lambda = - \left(\frac{\mu^2}{8\nu} + \nu \right) + \text{ordre } M^2$$

sont satisfaites, $\vec{\rho}_V^2$ admet la valeur 1 pour maximum pour deux valeurs de w données par :

$$(80) \quad \left. \begin{matrix} w' \\ w'' \end{matrix} \right\} = w_1 \pm \text{Arc cos } \frac{\mu}{4\nu} + \text{ordre } M = \pm \text{Arc cos } \frac{\mu}{4\nu} + \text{ordre } M$$

comme le montre un raisonnement analogue à celui du § II,5.3.1.

Les solutions bi-impulsionnelles ainsi obtenues sont d'un type général, contrairement aux solutions mono-impulsionnelles. On dispose en effet de sept paramètres ($p_a, \delta p_e, L_e, \delta p_z, \delta L$ et les grandeurs $I' \Delta C$ et $I'' \Delta C$ des deux impulsions) ramenés à cinq paramètres indépendants par les deux conditions de compatibilité (78) (79), pour réaliser les cinq variations des éléments de l'orbite.

Les deux impulsions sont symétriques par rapport à la direction d'argument L_e quelconque. Les solutions ainsi obtenues pourraient être appelées de type (4) (transition III $\leftrightarrow$ I) par analogie avec l'étude du § II,5.2.1.3. (fig. 11 b).

Notons que (78) entraîne que :

$$(81) \quad \delta L = \text{ordre } M^2$$

donc

$$(82) \quad \nu = \left| \frac{3}{2} \delta p_e - \frac{\sqrt{3}}{2} \delta p_z \right|$$

si bien que l'équation (79) s'écrit encore :

$$(83) \quad \left(\delta p_e + \sqrt{3} \delta p_z \right) \left(\sqrt{3} \delta p_e - \delta p_z \right) = \frac{4 p_a^2}{\sqrt{3}}.$$

Si $|p_a| \ll M$ (par exemple $|p_a| = \text{ordre } M^2$), alors $\left. \begin{matrix} w' \\ w'' \end{matrix} \right\} = \pm \frac{\pi}{2} + \text{ordre } M$.

Les deux impulsions sont quasi-diamétralement opposées. Ces solutions pourraient être appelées de type (13) (transition III $\leftrightarrow$ II) par analogie avec l'étude du § II,5.2.1.3. (fig. 11 b).

c) Si $e = \text{ordre } M$, la présence du terme en $\cos(3w + L_e)$ dans (70) montre qu'il peut exister des cas où $\vec{\rho}_V^2$ admet la valeur 1 pour maximum pour trois valeurs de w , c'est-à-dire qu'il peut exister des solutions tri-impulsionnelles.

Il faut pour cela que $\vec{\rho}_V^2$ soit de la forme :

$$(84) \quad \vec{\rho}_V^2 = 1 - k \left[1 - \cos(w - w') \right] \left[1 - \cos(w - w'') \right] \left[1 - \cos(w - w''') \right]$$

où w', w'', w''' sont relatifs aux trois impulsions et où $k > 0$.

L'identification des coefficients des termes en $\cos 3w$, $\sin 3w$ et $\sin w$ dans (70) et (84) conduit à :

$$(85) \quad k = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$$(86) \quad w' + w'' + w''' + L_e = 0$$

$$(87) \quad \sin w' + \sin w'' + \sin w''' + \sin w' \cdot \sin w'' \cdot \sin w''' = 3 \sin L_e$$

Notons qu'il est encore possible d'écrire l'équation vectorielle (19) et d'utiliser la figure 5 en commettant une erreur relative de l'ordre de ε . L'angle L_e est donc, à ε près, l'ascension droite du "vecteur consommation" $\vec{\Delta C}$ défini par (19). L_e est donc bien fixé pour un transfert donné.

La figure 20 concerne la résolution du système (86) (87) par rapport à w', w'', w''' pour différentes valeurs de L_e .

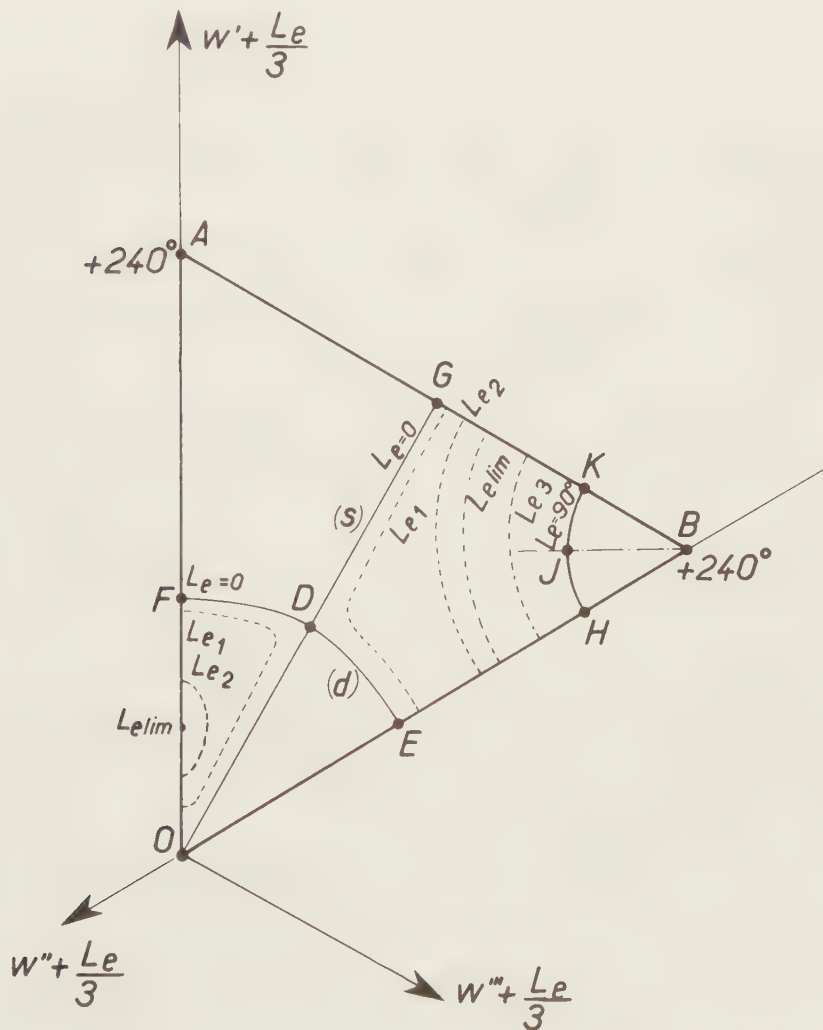


Fig. 20

Les abscisses, comptées sur les axes indiqués, des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point M sur ces axes sont respectivement égales à

$$w' + \frac{L_e}{3}, w'' + \frac{L_e}{3}, w''' + \frac{L_e}{3}.$$

Le lieu du point M lorsque w', w'', w''' , solutions du système (86) (87), varient, L_e étant fixé, est une ligne du plan ainsi défini. Il est possible de se limiter au cas $0 < L_e < 90^\circ$ et à l'intérieur du triangle équilatéral OAB . Il faut alors compléter par symétrie par rapport aux côtés du triangle et aux côtés des triangles successifs ainsi obtenus.

Seules les lignes $L_e = 0$ et $L_e = 90^\circ$, figurant en traits pleins, ont été calculées. Le tracé des autres lignes, en pointillé, est seulement probable.

a) Cas $L_e = 0$.

Le "vecteur consommation" $\vec{AC}$ est parallèle au grand axe de (O) .

Il y a deux types de solutions tri-impulsionnelles :

1. SOLUTIONS SYMÉTRIQUES (segment OG de la figure 20).

$$(88) \quad L''' = 0$$

$$(89) \quad L'' = -L'.$$

Ces solutions consistent à appliquer une impulsion tangente au périégée P ($L''' = 0$) de l'orbite (O) et deux impulsions aux points $M'(L')$ et $M''(L'')$ symétriques par rapport au grand axe, pratiquement contenues dans l'un des plans (π^+) ou (π^-) (fig. 21 b).

Suivant les grandeurs relatives de ces impulsions, il est possible d'atteindre tout point G à l'intérieur du triangle $PV'V''$ (fig. 21 a). G est le "centre de gravité" des "masses" fictives placées en V' , V'' et P proportionnellement aux impulsions correspondantes.

Le cône du troisième ordre de sommet P s'appuyant sur la Fenêtre de VIVIANI (V) et d'équation :

$$(90) \quad y_1(x_1^2 + y_1^2) - 2(\Delta C - z_1)(x_1^2 + y_1^2) + y_1(\Delta C - z_1)^2 = 0$$

limite à l'intérieur du volume total (V^*) un volume correspondant aux solutions tri-impulsionnelles symétriques.

Afin de mieux visualiser ce volume, considérons ses sections $y_1 = C^{te}$ engendrées par le segment $v'v''$. La limitante $\widehat{V_1 V_3} \quad \widehat{V_2 V_4}$ d'équation :

$$(91) \quad x_1^2 = y_1 \frac{(\Delta C - y_1 - z_1)^2}{2\Delta C - y_1 - 2z_1} \quad (y_1 = \text{constante})$$

est symétrique par rapport à $x_1 = 0$, admet un point double en $z_1 = \Delta C - y_1$, une asymptote $z_1 = \Delta C - \frac{y_1}{2}$ et deux branches paraboliques parallèles à l'axe $\vec{Oz}_1$.

2. SOLUTIONS DISSYMMÉTRIQUES.

Elles correspondent à l'arc quasi-circulaire $\widehat{EF}$ de la figure 20, symétrique par rapport à OG .

$$(92) \quad L' + L''' = -L''$$

$$(93) \quad L' - L''' = 2 \operatorname{Arc} \cos \left(\sin \frac{L''}{2} \operatorname{tg} \frac{L''}{2} \right).$$

Lorsque L'' varie de -90° à $-103^\circ 40'$, (arc $\widehat{DE}$ de la figure 20) le point V'' décrit l'arc $\widehat{LJ}$ de (V) (fig. 22 a) alors que les points V' et V'' décrivent respectivement les arcs $\widehat{LT}$ et $\widehat{PT}$. Le point T correspond à $L = 51^\circ 50'$.

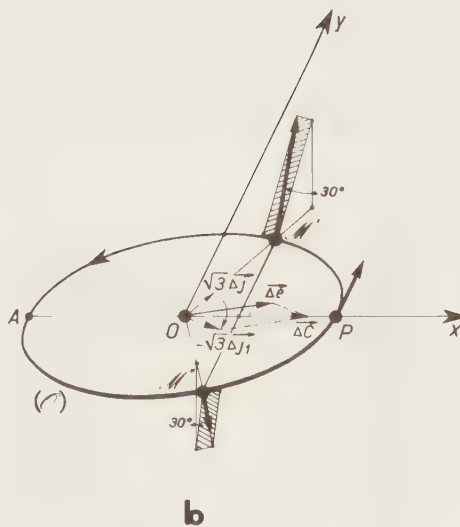
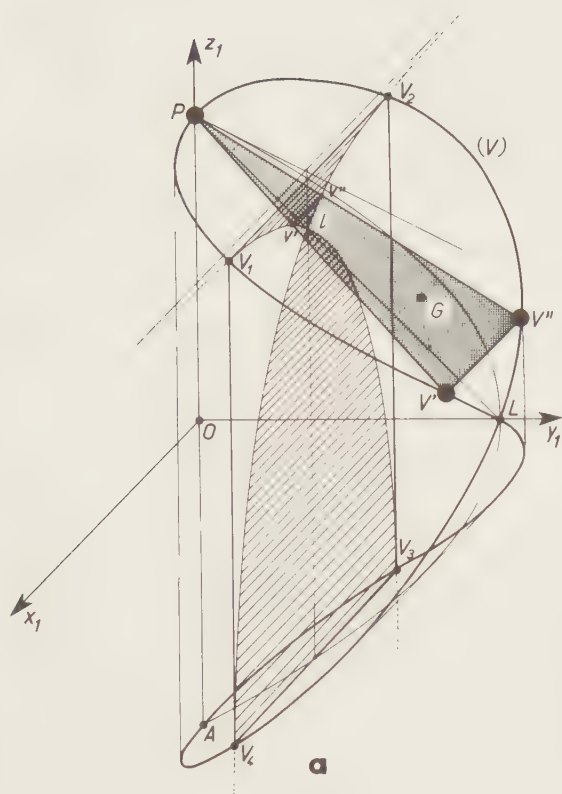


Fig. 21 - Type III. Solutions tri-impulsionnelles symétriques. ($L_e = 0$, $\Delta e \leq 0$).

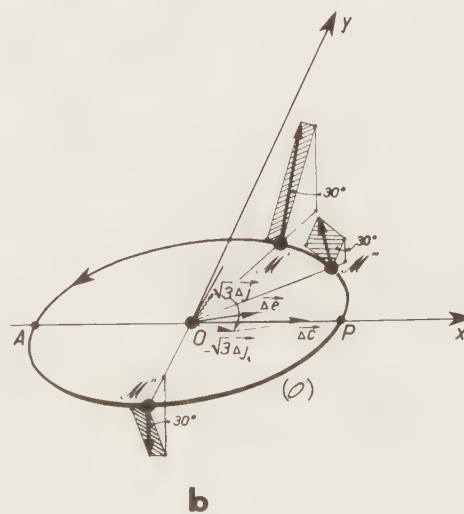
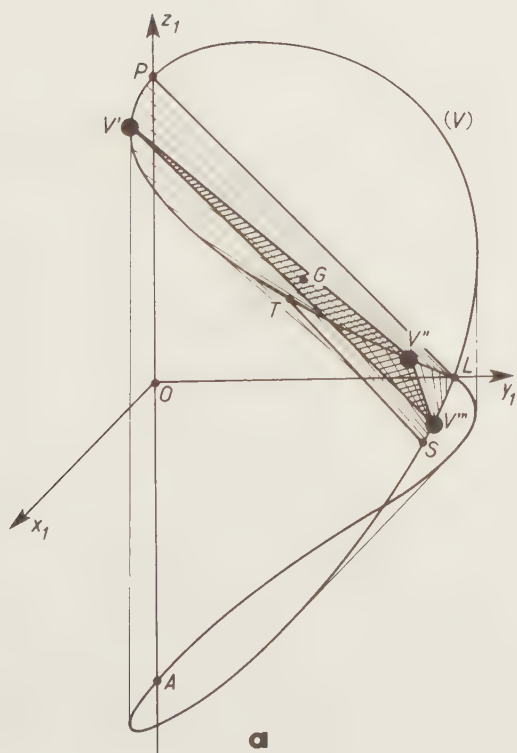


Fig. 22 - Type III. Solutions tri-impulsionnelles dissymétriques. ($L_e = 0$, $\Delta e \leq 0$).

Par un choix convenable des grandeurs des impulsions en $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}''$, $\mathcal{M}'''$ (fig. 22 b) il est possible d'atteindre tout point G à l'intérieur du triangle $V'V''V'''$.

Lorsque L'' varie, ce triangle engendre un volume limité par la surface réglée engendrée par les segments $V''V'''$, $V'''V'$, $V'V''$. Ce volume et le volume symétrique par rapport au plan $x_1 = 0$ correspondent aux solutions tri-impulsionnelles dissymétriques.

La figure 23 résume les résultats précédents en montrant, pour chaque section $y_1 = \text{Cte}$, les zones correspondant aux solutions optimales à deux impulsions (2) ou à trois impulsions symétriques (3s) ou dissymétriques (3d).

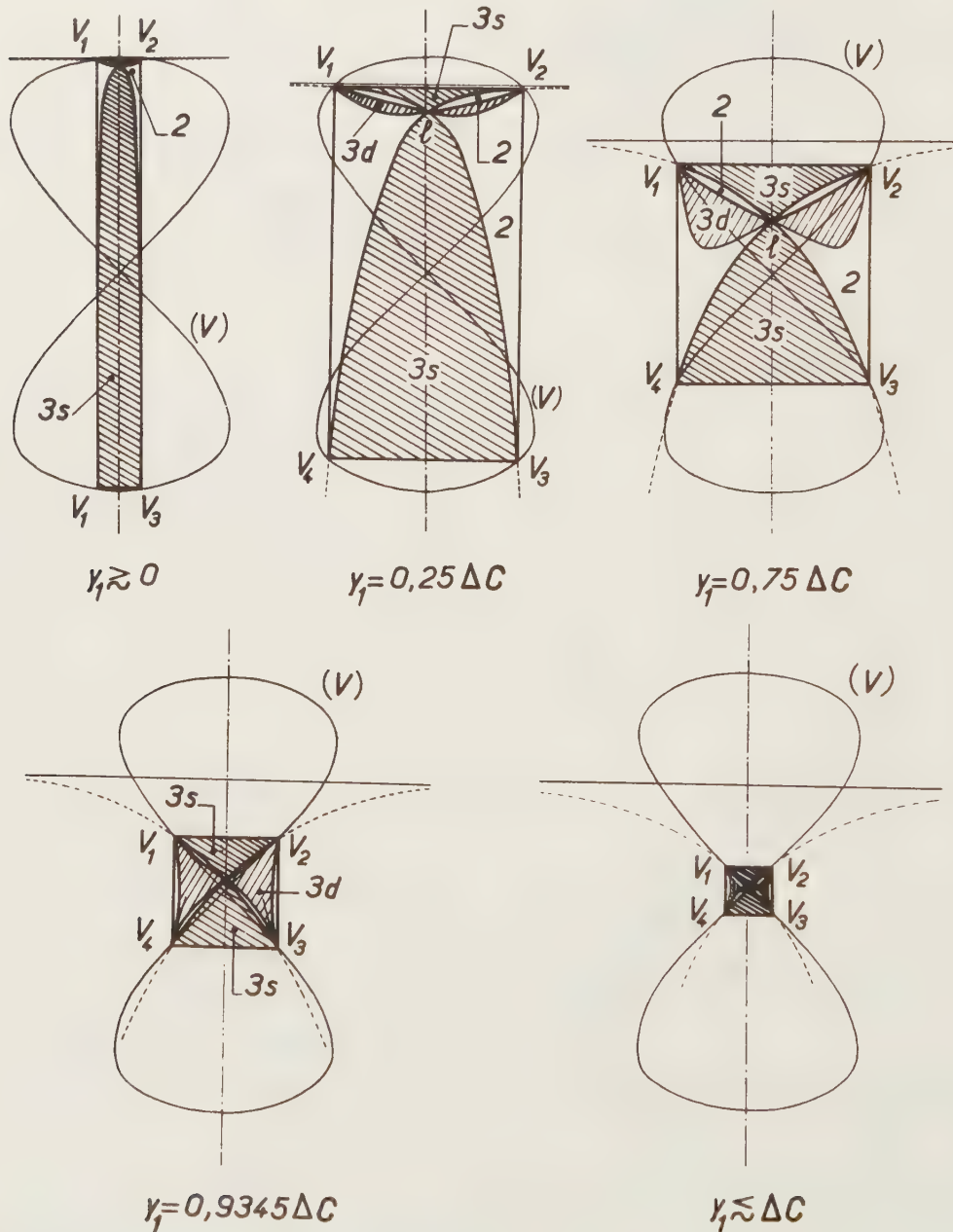


Fig. 23 - Type III. Sections $y_1 = \text{Cte}$

La frontière de la zone (3d) admet des points anguleux en V_1 , V_2 et ℓ . Pour $y_1 = y_{1s} = 0,9345 \Delta C$, les points V_3 et V_4 sont points de rebroussement. Pour $0,9345 \Delta C < y_1 \leq \Delta C$ ils sont points anguleux.

On peut noter que pour $y_1 \approx \Delta C$, les zones (2) à deux impulsions sont très réduites.

Ce cas correspond à une rotation $\vec{\Delta j}$ autour d'un axe voisin du « paramètre » $\vec{Oy}$, associée à un déplacement du centre dans une direction voisine du grand axe et à une faible « dilatation ». Les solutions à trois impulsions présentent alors une petite impulsion tangente au périhélie (3S) ou quasi-tangente au voisinage du périhélie (3d) et deux autres impulsions, dont une au moins est importante, quasi-perpendiculaires à la tangente à l'orbite, appliquées en des points voisins des sommets du « paramètre », symétriques par rapport au grand axe (3S) ou quasi-diamétralement opposées (3d).

b) Cas $L_e = 90^\circ$

Le « vecteur consommation » $\vec{\Delta C}$ est porté par le « paramètre » $\vec{Oy}$ de (O).

Les trois impulsions sont situées au voisinage de l'apogée (fig. 24 b)

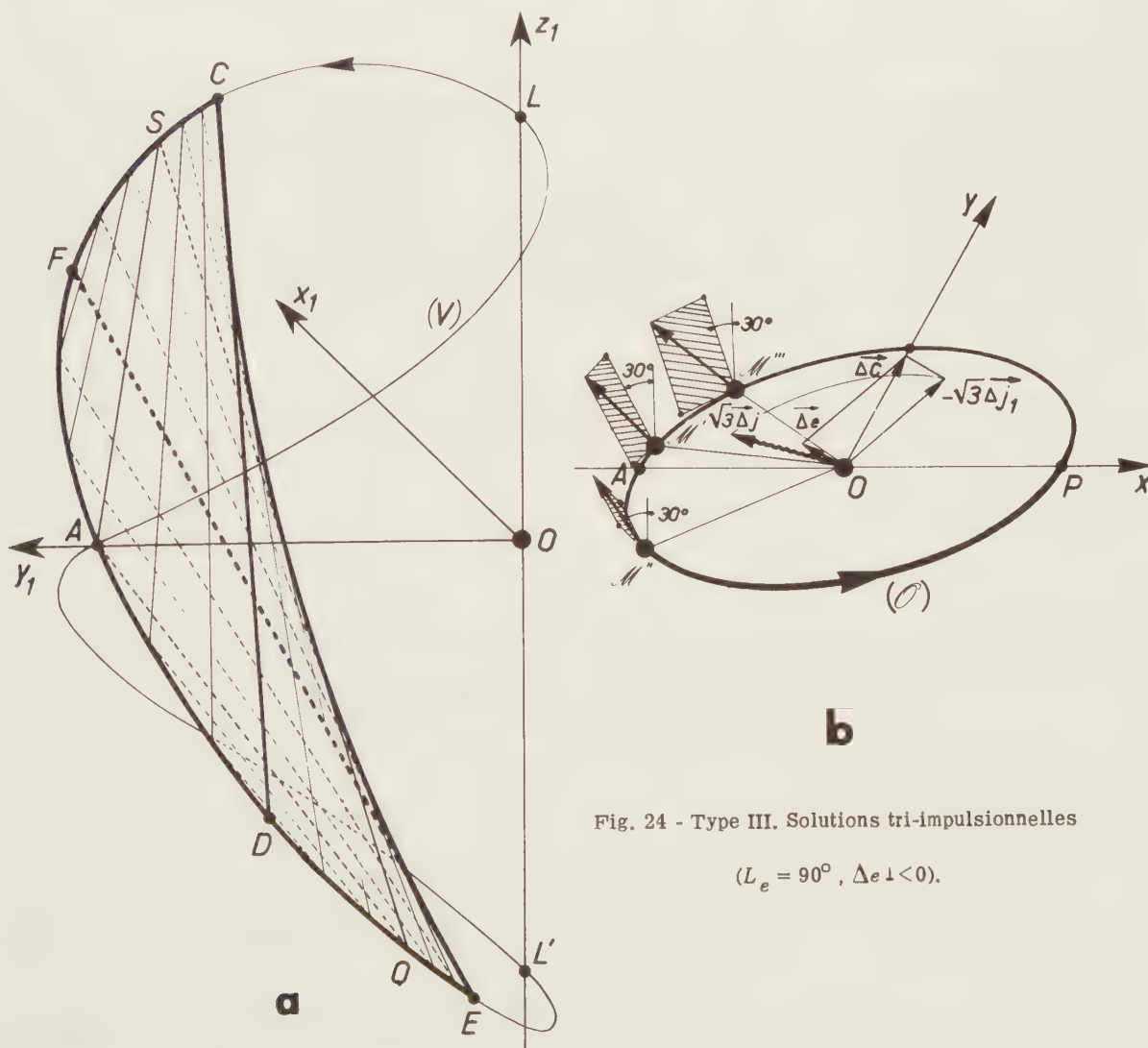


Fig. 24 - Type III. Solutions tri-impulsionnelles

$$(L_e = 90^\circ, \Delta e \perp < 0).$$

Lorsqu'on décrit les arcs quasi-circulaires $\widehat{HJ}$, $\widehat{JK}$ de la figure 20, symétriques par rapport à $\widehat{BJ}$, les points $V'V''V'''$ décrivent respectivement les arcs $\widehat{FA}$, $\widehat{AD}$, $\widehat{EQ}$, $\widehat{QD}$ et $\widehat{FS}$, $\widehat{SC}$ (fig. 24 a)

avec :

$$\begin{aligned}
 C : W &= 40^{\circ} 34' & L &= 130^{\circ} 34' \\
 S : W &= 47^{\circ} 03' & L &= 137^{\circ} 03' \\
 F : W &= 65^{\circ} 12' & L &= 155^{\circ} 12' \\
 A : W &= 90^{\circ} & L &= 180^{\circ} \\
 D : W &= 114^{\circ} 48' & L &= 204^{\circ} 48' \\
 Q : W &= 132^{\circ} 57' & L &= 222^{\circ} 57' \\
 E : W &= 139^{\circ} 36' & L &= 229^{\circ} 36'
 \end{aligned}$$

Le triangle $V'V''V'''$ engendre alors un volume limité par la surface réglée engendrée par les segments $V''V'''$, $V'''V'$ et $V'V''$.

Ce volume correspond aux solutions tri-impulsionnelles du cas $L_e = 90^{\circ}$. On peut remarquer que ce volume est moins important que celui relatif au cas $L_e = 0^{\circ}$.

II,5.4. CONCLUSION.

La solution analytique complète, du premier ordre, relative au problème des transferts économiques (vitesse caractéristique minimale, durée indifférente) entre orbites quasi-circulaires proches coplanaires ou non, a pu être obtenue par linéarisation autour d'une orbite nominale circulaire.

De tels transferts peuvent toujours être réalisés de façon optimale à l'aide de deux impulsions bien déterminées. Néanmoins, dans certains cas (dégénérescence de la solution linéarisée) un choix plus étendu est offert, le même transfert pouvant être réalisé de plusieurs façons, les consommations correspondantes ne différant que de quantités du second ordre par rapport aux variations des éléments de l'orbite.

Toutefois, cette dégénérescence disparaît si le transfert a lieu entre orbites dont l'excentricité est petite devant un, mais grande devant l'importance du transfert et les solutions sont alors mono- ou tri-impulsionnelles.

II,6. RENDEZ-VOUS IMPULSIONNELS OPTIMAUX, DE LONGUE DURÉE, ENTRE ORBITES QUASI-CIRCULAIRES, PROCHES, COPLANAIRES OU NON.

II,6.1. INTRODUCTION.

En plus des cinq variations imposées $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\theta, \Delta\alpha, \Delta\beta$ des éléments orbitaux considérées au chapitre II,5. dans le cas du transfert, il faut introduire ici la sixième variation $\Delta\tau$ relative au rendez-vous.

Rappelons que, pour e quelconque, $\Delta\tau$ = (retard temporel δt_o , compté sur l'orbite finale (O_f) , du mobile fictif M_o de même ascension droite L_o que le mobile réel initial M_o , par rapport au mobile cible initial M_{co}) + $\frac{3}{2} M_o \Delta\theta + \overline{R_o} \cdot \overline{\Delta e}$. (fig. 1). M_o et $\overline{R_o}'$ ne dépendent que de e et L_o . Ici, $e = 0$, et le retard temporel δt_o peut être remplacé par le retard angulaire $\widehat{M_{co} O M_o}$. De plus, $M_o = L_o$ et $\overline{R_o} = 2Y_o$.

$$(4) \quad \vec{p_v} \rightarrow \begin{cases} X = p_e \sin(L - L_e) \\ Y = \underbrace{2p_a + 3p_\tau L}_{2p_a} + 2p_e \cos(L - L_e) \\ Z = p_z \sin(L - L_z) \end{cases}$$

Il est important de remarquer que, dans cette approximation, l'ascension droite L n'intervient que par le numéro du tour k , ce qui simplifie beaucoup la solution.

Notons également que les solutions impulsioneilles (ou, à la rigueur, les solutions singulières) étant seules considérées ici, $|\vec{p_v}|$ est $\ll 1$; donc, dans (2), $|Y|$ est $\ll 1$, ce qui entraîne :
 $p_\tau \ll \text{ordre } \frac{1}{\Delta L}$.

II,6.2. DOMAINE ACCESSIBLE.

Il s'agit de définir l'ensemble des points de l'espace à cinq dimensions des variations $\Delta e_{||}$, $\Delta e_{\perp}$, Δj , Δa , $\Delta \tau$ qui peuvent être atteints avec la vitesse caractéristique ΔC .

Il est commode, dans le cas des rendez-vous de longue durée, de prendre comme sixième variation non plus $\Delta \tau$ mais :

$$(5) \quad \Delta \mathcal{T} = -\frac{4}{3} \frac{\Delta \tau}{\Delta L} + \Delta a = -\frac{4}{3} \frac{\delta t_0}{\Delta L} + \Delta a + \text{ordre } \frac{1}{\Delta L}$$

ce qui introduit des symétries supplémentaires dans le domaine accessible.

En effet, remarquant que :

$$(6) \quad \mathcal{T}' = \frac{4}{3} \frac{\tau'}{\Delta L} + a' = \left(1 - 2 \frac{k}{N}\right) a'$$

et prenant l'axe de référence $\vec{Ox}$ selon la ligne des nœuds, support du vecteur rotation $\vec{\Delta j}$ ($d\alpha$ et $d\beta$ représentent alors respectivement $de_{||}$ et $de_{\perp}$), il est possible de modifier le signe de chacune des cinq variations définissant le rendez-vous, sans modifier les autres variations, en effectuant, pour toutes les poussées, les changements suivants :

$\Delta e_{ }, \Delta e_{\perp}, \Delta j, \Delta a, \Delta \mathcal{T}$	L	k	X	Y	Z
$-\Delta e_{ }$	$\pi - L$	k	$-X$	Y	$-Z$
$-\Delta e_{\perp}$	$-L$	k	$-X$	Y	Z
$-\Delta j$	$\pi + L$	k	X	Y	Z
$-\Delta a$	$\pi + L$	$N - k$	$-X$	$-Y$	$-Z$
$-\Delta \mathcal{T}$	L	$N - k$	X	Y	Z

Ces changements ne modifiant pas la grandeur des poussées, donc la consommation, le domaine accessible est symétrique par rapport aux axes, plans et espaces de coordonnées et il suffit de ne

considérer que des variations positives. (Il est cependant quelquefois commode, pour montrer comment les solutions optimales se composent linéairement, de considérer des variations de signes quelconques).

Cherchons tout d'abord à définir, dans le plan $\Delta\theta$, $\Delta\mathcal{C}$, l'ensemble des points accessibles avec la vitesse caractéristique $\Delta\mathcal{C}$, les variations $\Delta e_{\parallel}$, $\Delta e_{\perp}$, Δj étant fixées.

Cela suppose que la vitesse caractéristique $\Delta\mathcal{C}$ est au moins égale à la vitesse caractéristique minimale $\Delta\mathcal{C}_{min}$ nécessaire pour produire les variations $\Delta e_{\parallel}$, $\Delta e_{\perp}$, Δj qui définissent le point G de la figure 2, soit :

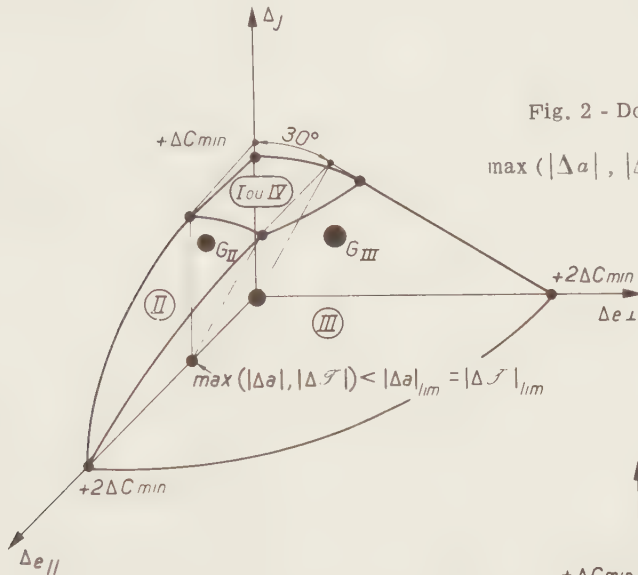


Fig. 2 - Domaine accessible pour :
 $\max(|\Delta a|, |\Delta \mathcal{C}|) < |\Delta a|_{lim} = |\Delta \mathcal{C}|_{lim}$.

Fig. 3 - Domaine accessible pour :
 $\max(|\Delta a|, |\Delta \mathcal{C}|) = |\Delta a|_{lim} = |\Delta \mathcal{C}|_{lim}$.

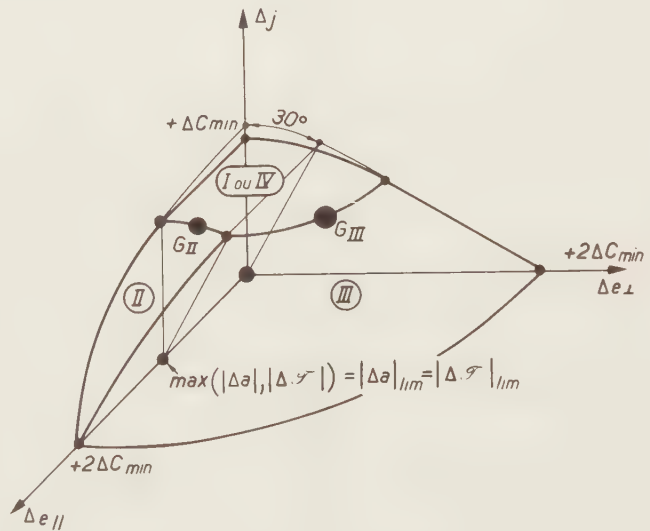
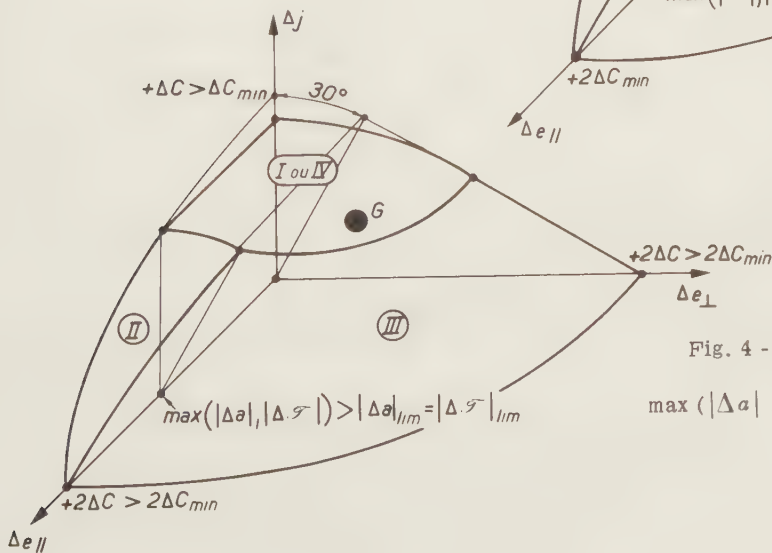


Fig. 4 - Domaine accessible pour :
 $\max(|\Delta a|, |\Delta \mathcal{C}|) > |\Delta a|_{lim} = |\Delta \mathcal{C}|_{lim}$.



$$(7) \quad \Delta C^2 \gg \Delta C_{min}^2 = \begin{cases} \frac{\Delta e_{//}^2}{4} + \Delta e_{\perp}^2 + \Delta j^2 \text{ si } 3\Delta e_{\perp}^2 \leq \Delta j^2 \text{ (II)} \\ \frac{\Delta e_{//}^2}{4} + \frac{(\Delta e_{\perp} + \sqrt{3}|\Delta j|)^2}{4} \text{ si } 3\Delta e_{\perp}^2 \gg \Delta j^2 \text{ (III)} \end{cases}$$

Il existe alors, associée à ΔC , une valeur maximale $|\Delta \vartheta|_{max}$ de $\Delta \vartheta$ (fig. 4) obtenue dans l'étude du transfert simple ($\Delta \mathcal{C}$ indifférent). $\Delta \vartheta_{max}^2$ est la plus grande des racines de l'équation bicarrée (II,5-22).

Le domaine accessible dans le plan $\Delta \vartheta$, $\Delta \mathcal{C}$ est donc nécessairement contenu dans la bande : $-|\Delta \vartheta|_{max} \leq \Delta \vartheta \leq +|\Delta \vartheta|_{max}$ (fig. 5). Le segment : $\Delta \mathcal{C} = 0$, $-|\Delta \vartheta|_{max} \leq \Delta \vartheta \leq +|\Delta \vartheta|_{max}$ du plan, obtenu dans le cas du transfert simple, n'est autre que le contour apparent du domaine accessible dans ce plan relatif au rendez-vous, parallèlement à l'axe $0 \Delta \mathcal{C}$.

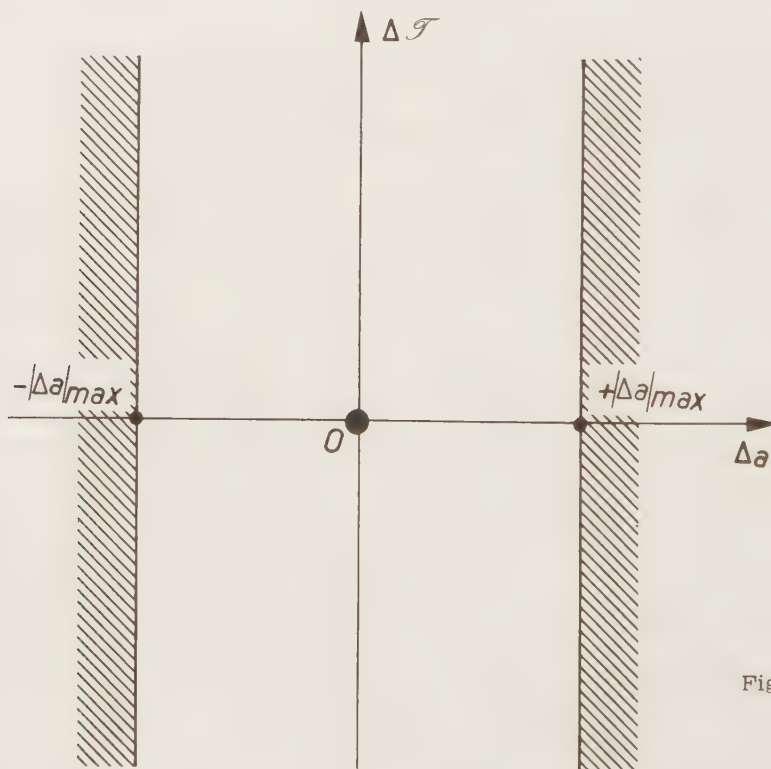


Fig. 5

Considérons à présent la loi de poussée qui produit une variation $\Delta \mathcal{C}$ maximale (fig. 6). Il lui correspond une certaine variation $\Delta \vartheta$.

L'équation (6) montre que cette loi de poussée est nécessairement telle que toutes les accélérations ($d\vartheta > 0$) soient faites au premier tour ($K = 0$) et toutes les décélérations ($d\vartheta < 0$) au dernier tour ($K = N$). (Solution de type $\mathcal{A}_0 \mathcal{D}_N$).

Montrons que la même valeur $\Delta \mathcal{C}_{max}$ peut être obtenue pour $\Delta \vartheta = |\Delta \vartheta|_{max}$. Il suffit pour cela de modifier la loi de poussée de la façon suivante :

Toute décélération au point d'ascension droite $\mathcal{L}$, due à une poussée de direction X, Y, Z , produite au dernier tour est remplacée par une accélération de même grandeur, au point d'ascension droite $\mathcal{L} + \pi$, due à une poussée de direction $-X, -Y, -Z$, produite au premier tour.

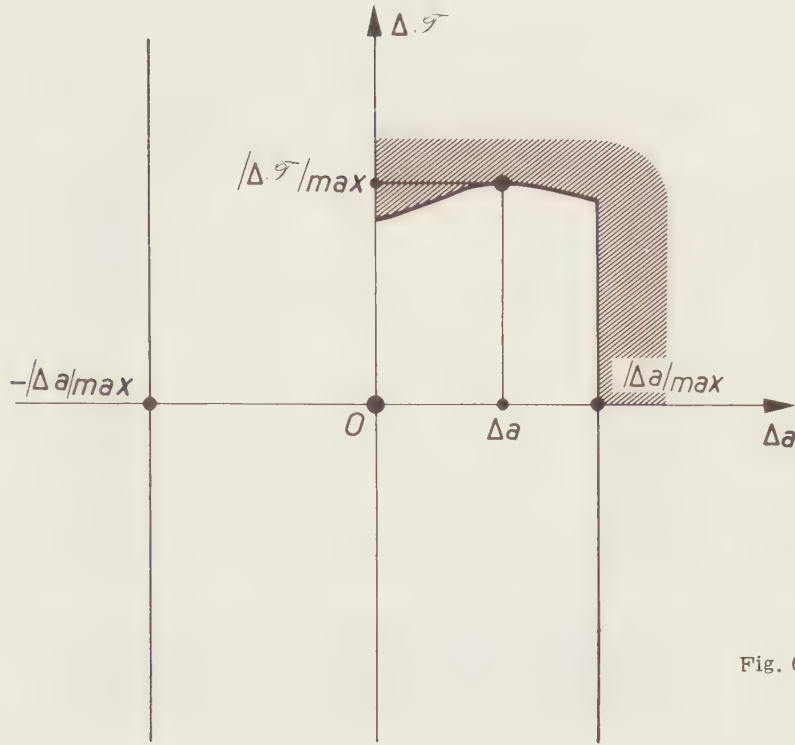


Fig. 6

Cette modification ne change pas $\Delta e_{\parallel}$, $\Delta e_{\perp}$, Δj et $\Delta \mathcal{T}_{max}$ (ni évidemment ΔC).

La nouvelle solution, optimale puisqu'elle conduit à $\Delta \mathcal{T}_{max}$, ne comportant que des accélérations au premier tour (type $\mathcal{A}_0$) est telle que :

$$(8) \quad \Delta \mathcal{T}_{max} = \Delta \partial \ll \Delta \partial_{max}.$$

Or, la solution optimale de type I (ou, à la rigueur, limite entre les types I et II ou I et III) rencontrée dans l'étude du transfert simple et conduisant à $\Delta \partial_{max}$ peut produire :

$$(9) \quad \Delta \mathcal{T} = \Delta \partial_{max}$$

à condition de placer toutes les accélérations au premier tour (solution bi-impulsionnelle de type $A_0 A_0$).

La comparaison des équations (8) et (9) montre que : $\Delta \mathcal{T}_{max} = \Delta \partial_{max}$ et que la solution optimale $\mathcal{A}_0 \equiv A_0 A_0$ est de type I.

Notons que, pour $\Delta \mathcal{T} = \Delta \mathcal{T}_{max}$, toute valeur intermédiaire de Δa entre $-|\Delta \partial|_{max}$ et $+|\Delta \partial|_{max}$ s'obtient par combinaison linéaire $\mathcal{A}_0 \mathcal{D}_N$ de la solution de type I : $\mathcal{A}_0 \equiv A_0 A_0$ (deux accélérations au premier tour) conduisant à $+|\Delta \partial|_{max}$ et de la solution de type I : $\mathcal{D}_N \equiv D_N D_N$ (deux décélérations au dernier tour), conduisant à $-|\Delta \partial|_{max}$ (fig. 7).

La solution optimale correspondante, d'un type nouveau (type IV), correspond à une valeur de ρ_r non nulle. Son existence se déduit aisément de la considération de la courbe d'efficacité. (fig. 8).

En effet, pour $\rho_r \neq 0$, cette courbe peut être considérée comme décrite par le point $\mathcal{P}$, parcourant avec la période 2π une ellipse, contenue dans un plan (π) fixe passant par $\overrightarrow{MY}$, se déplaçant lentement et parallèlement à $\overrightarrow{MY}$, le déplacement par tour (ou "pas") étant égal à :

$$\Delta Y = 3\rho_r (2\pi) = \text{ordre } \frac{1}{\Delta t} \ll 1.$$

Une solution de type IV est quadri-impulsionnelle et peut bien être regardée comme composition

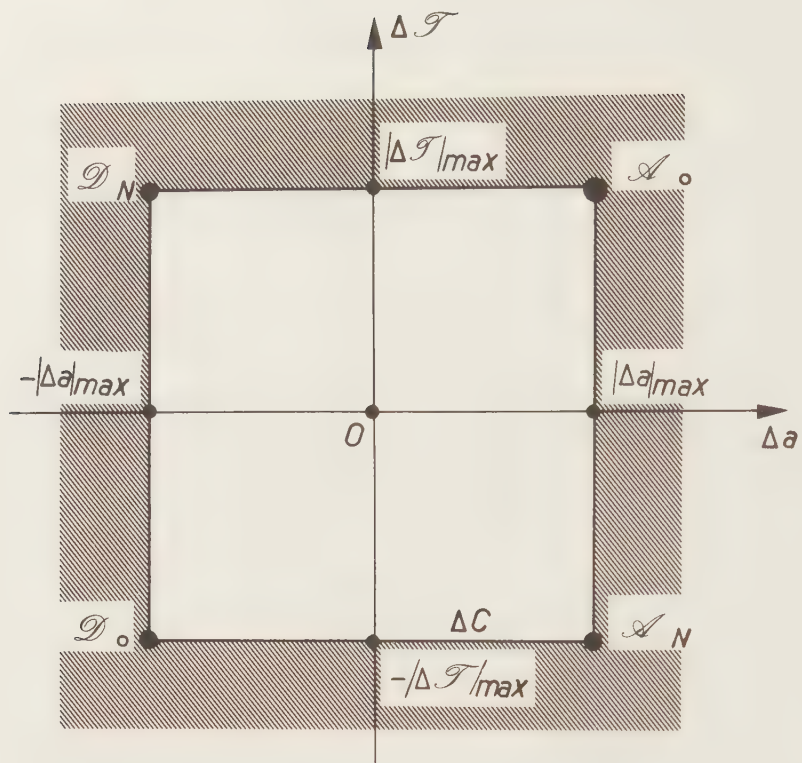
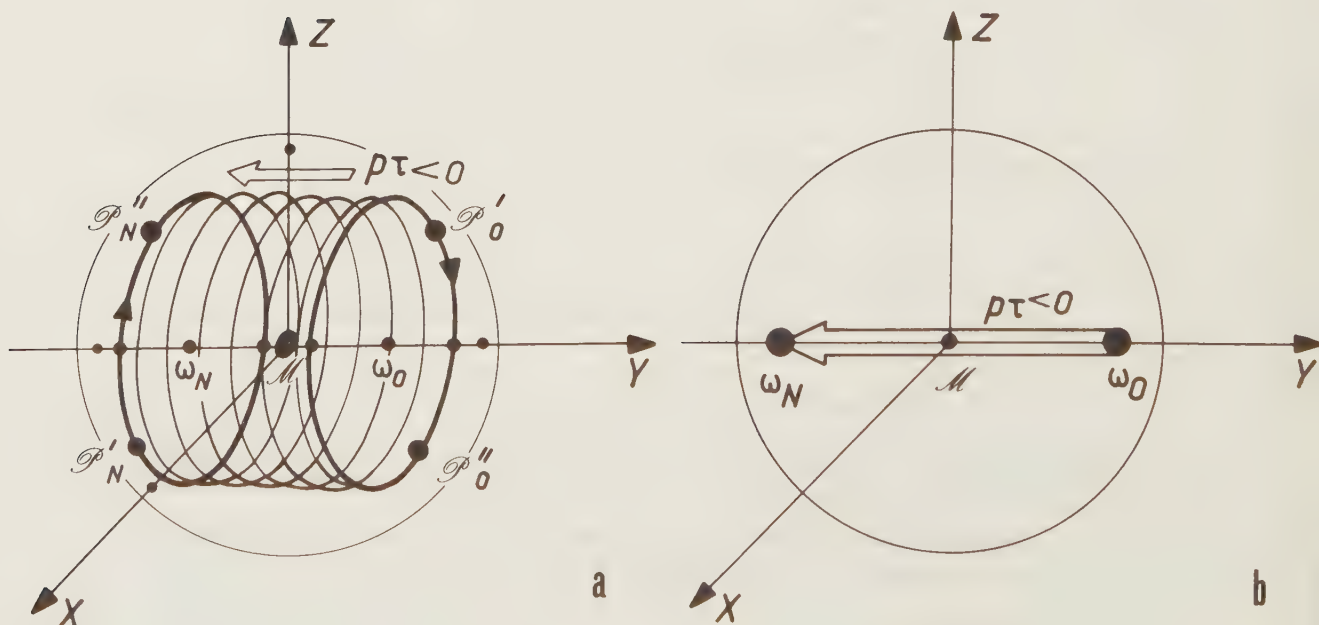
Fig. 7 - Domaine accessible dans le plan $\Delta a, \Delta T$.

Fig. 8 - Courbe d'efficacité dans le cas de rendez-vous lointains.

a - Type IV

b - Type IV bis.

de deux solutions de type I : l'une, $\mathcal{A}_0$, au premier tour (deux impulsions accélératrices $A_0 A_0$ aux points d'ascension droites $\mathcal{L}'_0$ et $\mathcal{L}''_0$, avec $X''_0 = -X'_0$, $Y''_0 = Y'_0$, $Z''_0 = -Z'_0$); l'autre, $\mathcal{D}_N$, au dernier tour (deux impulsions décélératrices $\mathcal{D}_N \mathcal{D}_N$ aux points diamétralement opposés d'ascension droites $\mathcal{L}'_N = \mathcal{L}'_0 + \pi$ et

$$\mathcal{L}''_N = \mathcal{L}''_0 + \pi, \text{ avec } X''_N = -X'_N = X'_0, Y''_N = Y'_N = -Y'_0, Z''_N = -Z'_N = Z'_0.$$

Notons également que le point $\mathcal{A}_0 (|\Delta a|_{\max}, |\Delta \mathcal{T}|_{\max})$ pouvant être obtenu avec la vitesse caractéristique ΔC , le point $\mathcal{A}_N (|\Delta a|_{\max}, -|\Delta \mathcal{T}|_{\max})$ symétrique du premier par rapport à l'axe $O\Delta a$ et correspondant à une solution de type I à deux impulsions accélératrices $A_N A_N$ appliquées au dernier tour, peut également être obtenu avec cette même vitesse caractéristique, ainsi que tout point $\mathcal{A}$ du segment $\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_N$ (par exemple, par combinaison linéaire des solutions $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_N$; mais nous verrons que cela n'est pas le seul procédé possible).

En conclusion, le domaine accessible dans le plan $\Delta a, \Delta \mathcal{T}$ avec la vitesse caractéristique ΔC et pour $\Delta e_{\parallel}, \Delta e_{\perp}, \Delta j$ donnés est l'intérieur du carré $\mathcal{A}_0 \mathcal{D}_N \mathcal{D}_0 \mathcal{A}_N$ représenté sur la figure 7. On en déduit que :

la section $\Delta a = C^{te}, \Delta \mathcal{T} = C^{te}$ du domaine accessible dans l'espace à trois dimensions $\Delta e_{\parallel}, \Delta e_{\perp}, \Delta j$ est la même que celle correspondant au transfert simple à condition de remplacer $|\Delta a|$ par $\max(|\Delta a|, |\Delta \mathcal{T}|)$.

Suivant que $\max(|\Delta a|, |\Delta \mathcal{T}|) = \begin{cases} |\Delta a| \\ |\Delta \mathcal{T}| \end{cases}$, la partie du domaine appelée (I) dans le cas du transfert simple doit être baptisée $\begin{cases} \text{(I)} \\ \text{(IV)} \end{cases}$ (fig. 4) (ou bien $\begin{cases} \text{(I bis)} \\ \text{(IV bis)} \end{cases}$, lorsque $\Delta j = 0$; dans ce dernier cas $|\Delta a|_{\max} = 2 \Delta C$)

Traçons maintenant dans le plan $\Delta a, \Delta \mathcal{T}$ et pour $\Delta e_{\parallel}, \Delta e_{\perp}, \Delta j$ fixés, les iso ΔC (fig. 9).

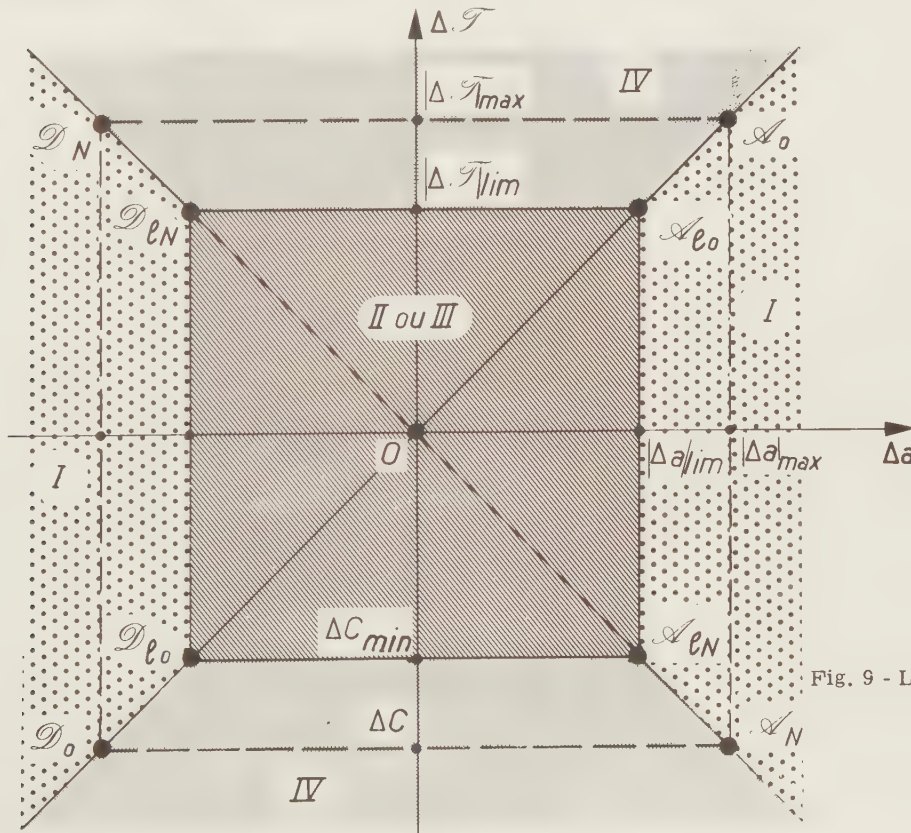


Fig. 9 - Lignes iso ΔC .

Si $\Delta C < \Delta C_{min}$, aucun rendez-vous ne peut être réalisé.

Si $\Delta C = \Delta C_{min}$ (fig. 2 et 3), tous les points à l'intérieur du carré $\mathcal{A}_{\ell_0}, \mathcal{D}_{\ell_N}, \mathcal{D}_{\ell_0}, \mathcal{A}_{\ell_N}$ peuvent être atteints en utilisant des solutions de type $\begin{cases} \text{II} \\ \text{III} \end{cases}$ selon que $\exists \Delta a_{\perp}^2 \leq \Delta j^2$.

Si $\Delta C > \Delta C_{min}$, l'iso ΔC est formée des quatre côtés du carré $\mathcal{A}_0, \mathcal{D}_N, \mathcal{D}_0, \mathcal{A}_N$.

La figure 10 indique les valeurs de p_{τ} correspondant à chacune des régions du plan $\Delta a, \Delta \mathcal{C}$.

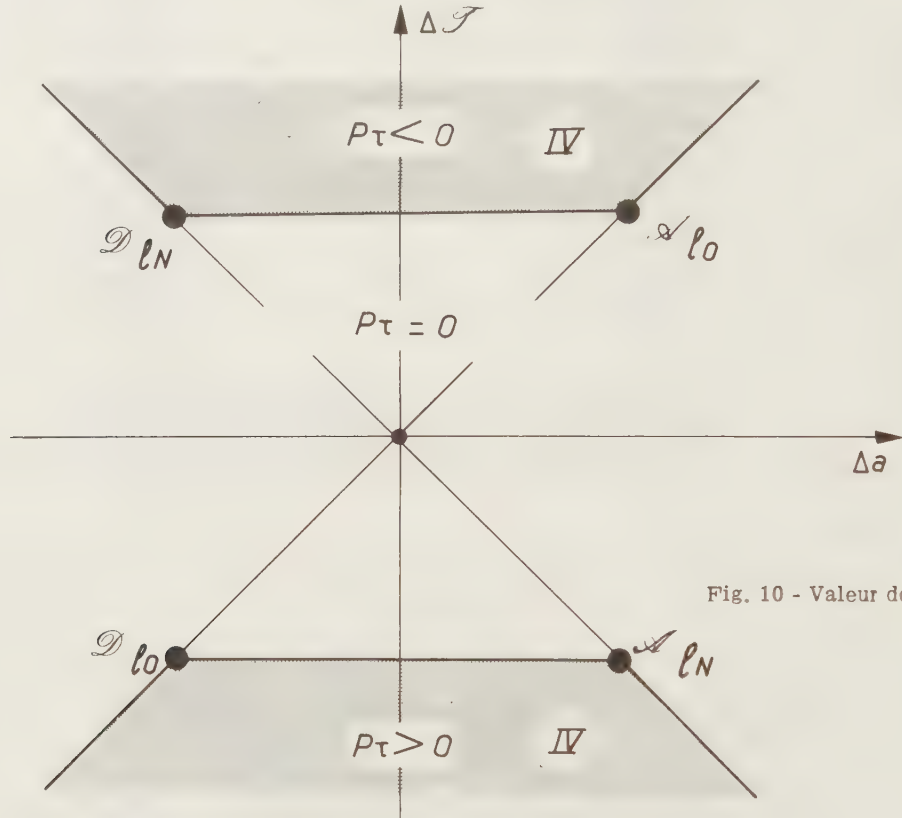


Fig. 10 - Valeur de p_{τ} .

II,6.3. DÉGÉNÉRESCENCES - SOLUTIONS A NOMBRE MINIMAL D'IMPULSIONS.

Dans la plupart des cas, la solution linéarisée optimale n'est pas unique mais dégénère en un grand nombre de solutions correspondant à une même vitesse caractéristique ΔC .

La dégénérescence peut intéresser soit uniquement la grandeur de la poussée (dégénérescence de grandeur), soit le point d'application et la grandeur (dégénérescence spatiale), soit encore le numéro du tour où la poussée est appliquée et éventuellement sa grandeur (dégénérescence temporelle).

Ces cas peuvent d'ailleurs se présenter simultanément, ce qui conduit à une dégénérescence spatio-temporelle complexe.

Rappelons que, dans le cas des transferts simples, il y a dégénérescence temporelle complète, la poussée optimale pouvant être appliquée à n'importe quel tour, avec fractionnement éventuel. Il y a, de plus, dégénérescence spatiale dans les deux cas singuliers de type I bis et III et dégénérescence de grandeur pour les solutions de type II correspondant à $\Delta a = \Delta a_{\perp} = 0$ [types (9), (10), (11) de la figure II,5 - 11 a].

Pour les rendez-vous, il existe également des cas dégénérés.

Il y a deux espèces de dégénérescences temporelles :

La première espèce, qui sera laissée de côté, est la suivante : une poussée au $k^{\text{ième}}$ tour (différent du premier et du dernier) peut être décomposée, en partie ou en totalité, en plusieurs poussées appliquées, au même endroit et dans la même direction, antérieurement et postérieurement à ce tour. Par exemple, une impulsion ΔV au $k^{\text{ième}}$ tour peut être décomposée en trois impulsions $\Delta V/3$ appliquées respectivement aux $(k-1)^{\text{ième}}$, $k^{\text{ième}}$ et $(k+1)^{\text{ième}}$ tour.

La seconde espèce intéresse les cas où il y a plusieurs applications de poussée par tour. Il est possible d'affecter à chacune de ces applications un numéro de tour, les numéros de tours ainsi obtenus étant liés par une relation linéaire, ce qui laisse une certaine possibilité de choix.

Il existe également des dégénérescences spatiales et des dégénérescences de grandeur.

Donnons quelques exemples de ces dégénérescences en portant notre attention sur les *solutions à nombre minimal d'impulsions* (fig. 11, 12, 13) très importantes dans la pratique, ce qui permettra d'ailleurs d'éviter l'étude de dégénérescences spatio-temporelles trop complexes.

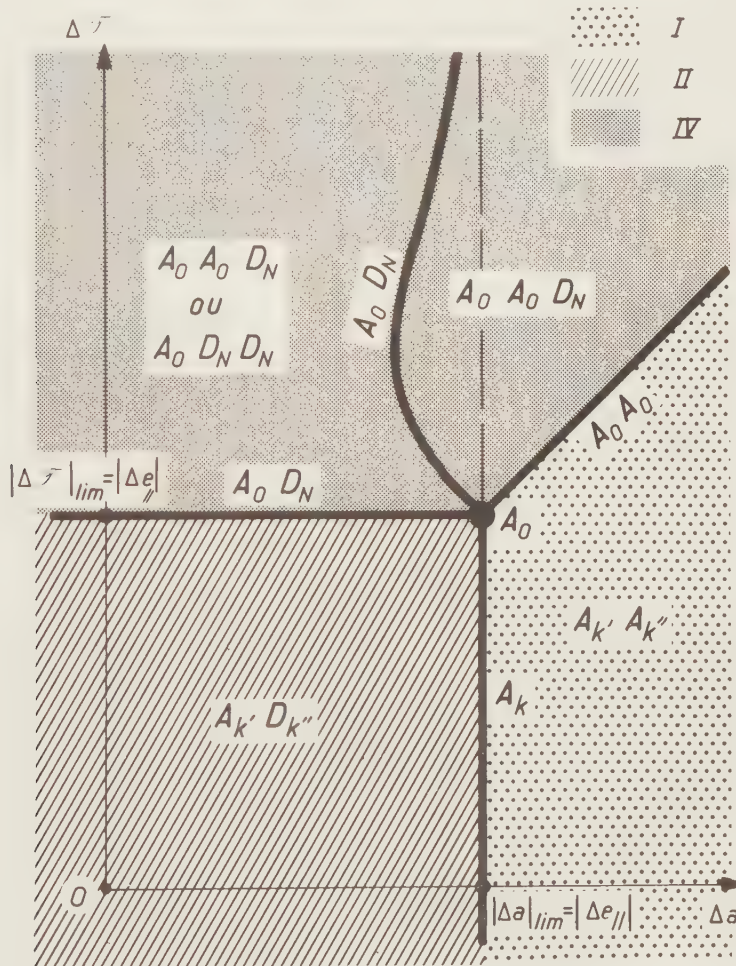


Fig. 11 - Nombre minimal d'impulsions ($|\Delta j| > \sqrt{3} |\Delta e \perp|$).

II,6.3.1. TYPE I.

La dégénérescence temporelle de première espèce étant écartée, les solutions sont bi-impulsionnelles :

L'impulsion $I' \Delta C$, appliquée au k' ième tour et l'impulsion $I'' \Delta C$ appliquée au k'' ième tour (solution $A_k, A_{k''}$, si $\Delta a > 0$ ou $D_k, D_{k''}$ si $\Delta a < 0$), avec $I' + I'' = 1$, produisent, entre autres, les variations :

$$\Delta a = 2 \gamma \Delta C$$

$$\Delta \mathcal{C} = 2 \gamma \Delta C \left[\left(1 - 2 \frac{k'}{N}\right) I' + \left(1 - 2 \frac{k''}{N}\right) I'' \right]$$

d'où :

(10)

$$k' I' + k'' I'' = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{\Delta \mathcal{C}}{\Delta a}\right)$$

Pour un rendez-vous donné ($I', I'', \Delta a, \Delta \mathcal{C}, N$ fixés), le point K de coordonnées k' et k'' peut donc être choisi librement sur le segment PQ (fig. 14). Il subsiste un degré de liberté. Il y a dégénérescence temporelle (de seconde espèce). Tout point M de la région $\mathcal{I}$ du plan $\Delta a, \Delta \mathcal{C}$ peut donc être obtenu, en général, par une infinité de solutions bi-impulsionnelles. Les numéros de tours relatifs à ces deux impulsions bien déterminées sont liés par une relation linéaire.

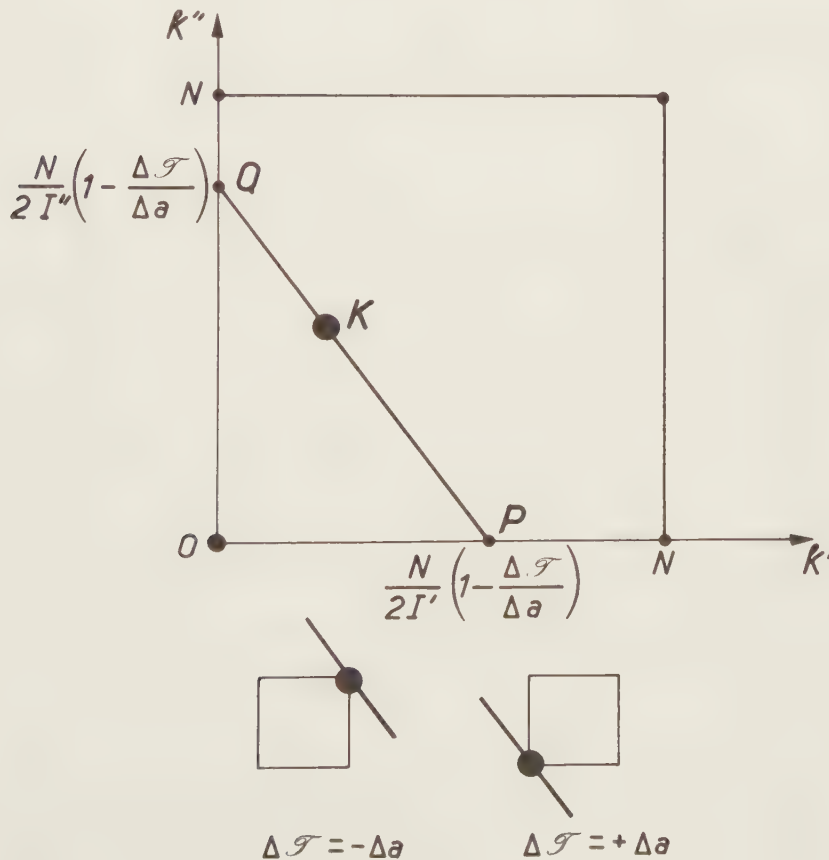


Fig. 14 - Dégénérescence temporelle des solutions bi-impulsionnelles de type I.

II,6.3.2. TYPE II.

On obtient des résultats analogues avec cette fois une solution de type $A_k, D_{k''}$ comportant une accélération et une décélération. La relation (10) est remplacée par :

$$k' I' - k'' I'' = \frac{N}{2} (I' - I'') \left(1 - \frac{\Delta \mathcal{T}}{\Delta a} \right)$$

soit encore :

(11)

$$k' (\Delta a + \Delta e_{||}) + k'' (\Delta a - \Delta e_{||}) = N (\Delta a - \Delta \mathcal{T})$$

(Voir fig. 15).

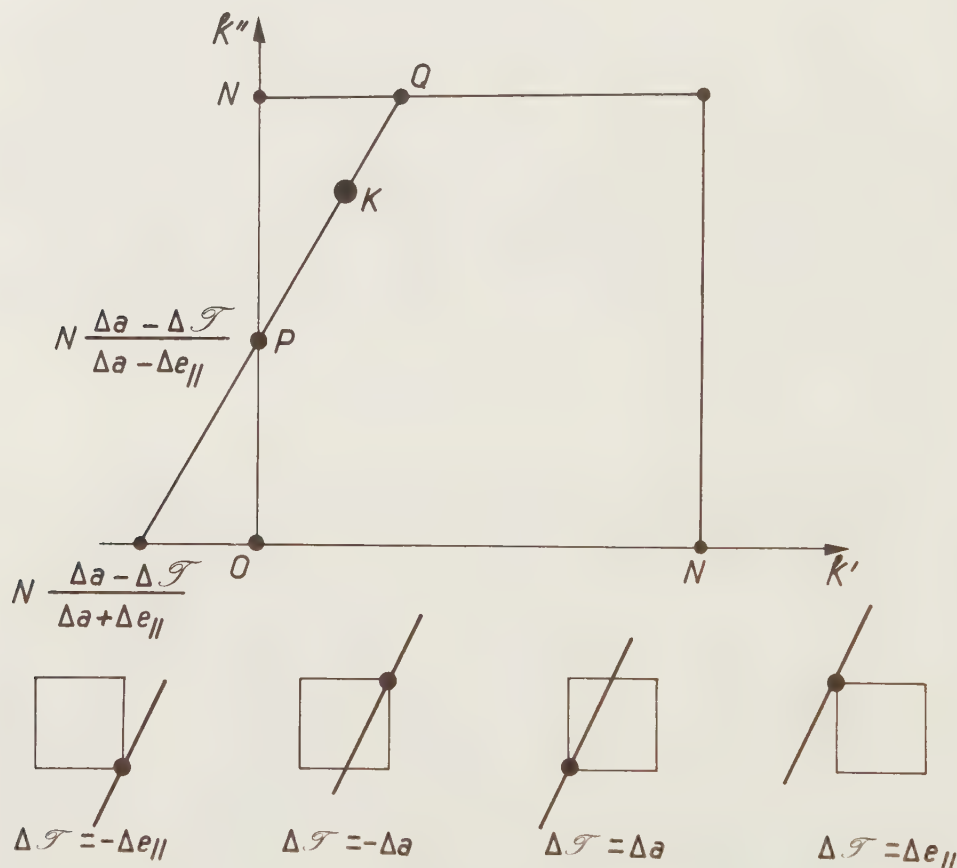


Fig. 15 - Dégénérescence temporelle des solutions bi-impulsionnelles de type II.

II,6.3.3. TYPE III.

Il y a dans ce cas une dégénérescence spatio-temporelle complexe.

Cherchons dans quelles conditions la solution peut ne comporter que deux impulsions.

Les variations $\Delta e_{||}$, $\Delta e_{\perp}$, Δj et la consommation $\Delta \mathcal{C}$ étant données, le point G représentatif du transfert associé au rendez-vous considéré, est situé, dans les axes $\vec{Ox}_1, \vec{Oy}_1, \vec{Oz}_1$ de la Fenêtre de VIVIANI (V) (fig. 16), sur une parallèle (Δ) à l'axe $\vec{Oz}_1$ (fig. 17).

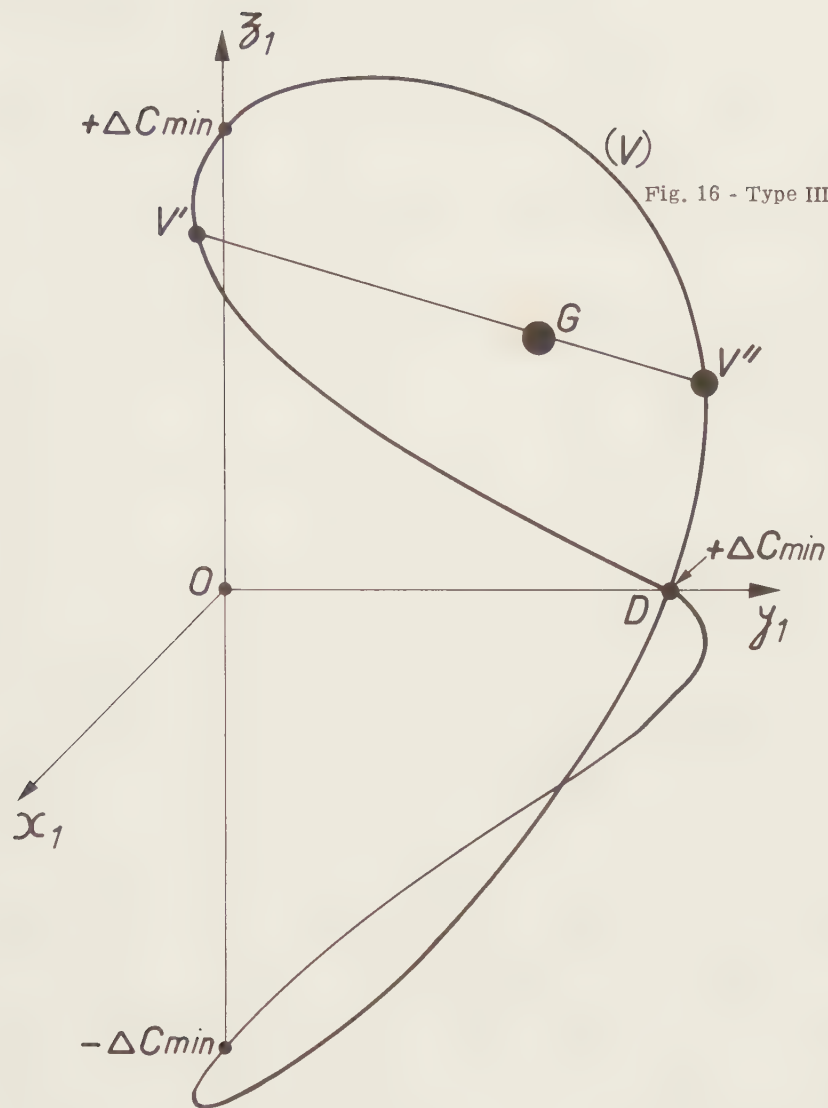
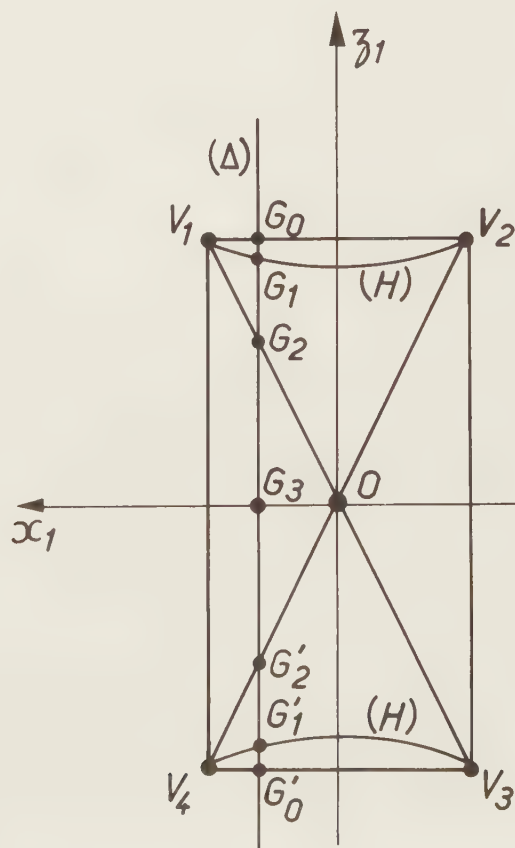


Fig. 16 - Type III. Solutions bi-impulsionnelles.

Fig. 17 - Section $y_1 = \text{constante}$.

Soit $V'V''$ l'une des deux cordes de (V) passant par G . Il lui correspond la solution bi-impulsionnelle $I'\Delta C, I''\Delta C (I' + I'' = 1)$ telle que :

$$(12) \quad \frac{\Delta \vartheta}{2} = z_1 G = I' z_1' + I'' z_1''$$

$$(13) \quad \frac{\Delta \mathcal{C}}{2} = \left(1 - 2 \frac{k'}{N}\right) I' z_1' + \left(1 - 2 \frac{k''}{N}\right) I'' z_1''.$$

Dans ces équations I', I'', z_1' et z_1'' sont fixés par le transfert à réaliser.

En effet, fixons le point G par la donnée de ses coordonnées cylindriques $\alpha, r < \frac{\Delta C}{2}$,

$z_1 = \frac{\Delta \vartheta}{2}$ dans les axes $\vec{Ox_1}, \vec{Oy_1}, \vec{Oz_1}$ (fig. 18). Alors :

$$(14) \quad \cos \beta = 2 \frac{r}{\Delta C} \cos \varphi$$

$$(15) \quad \begin{cases} \alpha' = 2L' = \alpha + \varphi - \beta \\ \alpha'' = 2L'' = \alpha + \varphi + \beta \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} z_1' = \Delta C \cos L' \\ z_1'' = \Delta C \cos L'' \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} I' = \frac{1}{2} + \frac{r}{\Delta C} \frac{\sin \varphi}{\sin \beta} \\ I'' = \frac{1}{2} - \frac{r}{\Delta C} \frac{\sin \varphi}{\sin \beta} \end{cases}$$

La droite (Δ) étant fixée par la donnée de α et r , les paramètres I', I'', z_1', z_1'' dépendent du seul paramètre angulaire $\varphi = (\vec{\sigma G}, \vec{\sigma X})$ théoriquement calculable en fonction de $\Delta \vartheta$ par (12) (deux solutions réelles correspondant aux deux cordes $V'V''$ passant par G).

Les résultats sont alors analogues à ceux obtenus dans l'étude des solutions bi-impulsionnelles de type I et II, les relations (10) et (11) étant cette fois remplacées, pour chacune des deux solutions bi-impulsionnelles relatives au point G , par :

$$(18) \quad k' I' z_1' + k'' I'' z_1'' = \frac{N}{2} (I' z_1' + I'' z_1'') \left(1 - \frac{\Delta \mathcal{C}}{\Delta \vartheta}\right).$$

En ce qui concerne la valeur maximale $\Delta \mathcal{C}_{\max, 2}$ de $\Delta \mathcal{C}$ qu'il est possible d'obtenir, à $\Delta \vartheta$ fixé, à l'aide de deux impulsions seulement, deux cas sont à envisager selon que les points V' et V'' sont tous deux situés dans le même demi-espace $z_1 = \frac{\Delta \vartheta}{2} > 0$ [solutions AA , à deux impulsions accélératrices (fig. 19)] ou $z_1 < 0$ (solutions DD , à deux impulsions décélératrices), ou bien dans deux demi-espaces différents (solutions AD , à une impulsion accélératrice et une impulsion décélératrice, fig. 20).

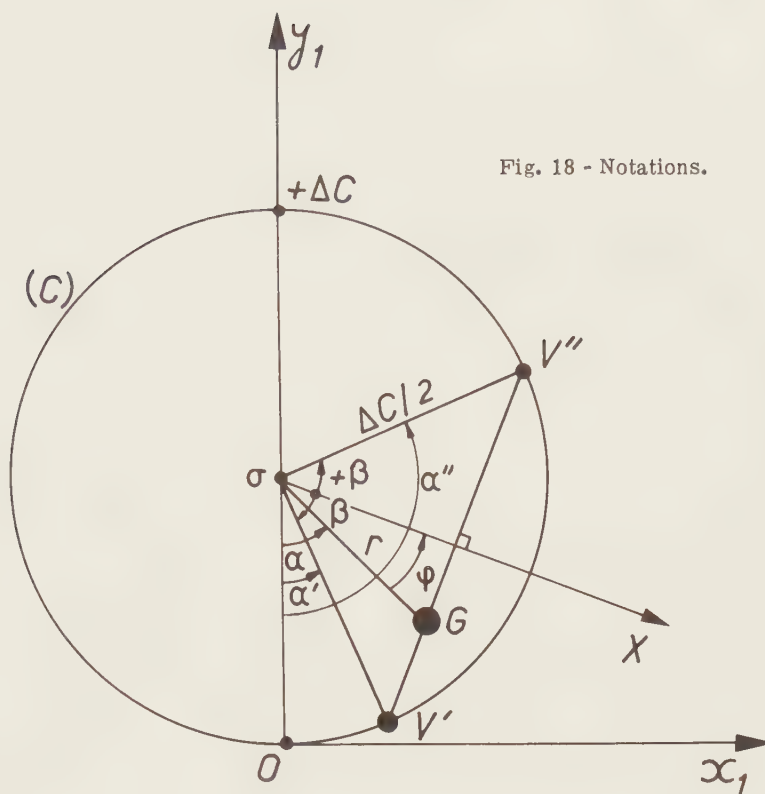


Fig. 18 - Notations.

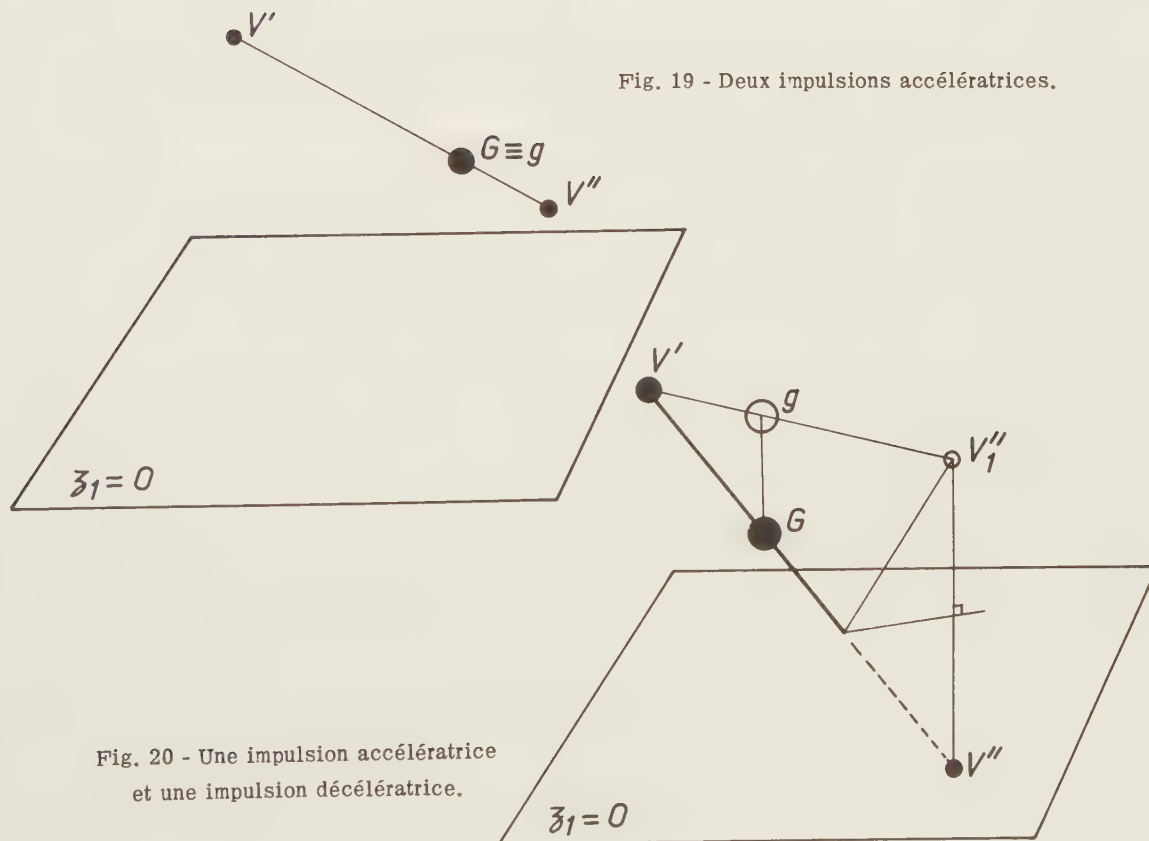


Fig. 19 - Deux impulsions accélératrices.

Fig. 20 - Une impulsion accélératrice
et une impulsion décélératrice.

La frontière séparant les points G correspondant à chacun de ces cas est obtenue lorsque V' (ou V'') est confondu avec le point double D de (V) .

Cette frontière est donc la portion de surface du cône circulaire (P) $[x_1^2 + (y_1 - \Delta c_{min}^2) - z_1^2 = 0]$ de sommet D s'appuyant sur la Fenêtre de VIVIANI (V) , intérieure au volume (V) limité par le plus petit contour convexe [portions de cylindres (C_I) et (C_{II})] habillant (V) .

Les solutions relatives aux deux cordes $V'V''$ de (V) passant par G appartiennent au même cas.

Lorsque le point G se déplace sur la droite (Δ) de G_0 à G_3 (fig. 17), les deux cordes $V'V''$ passant par G évoluent de la façon suivante :

Lorsque G est en G_0 , elles sont confondues avec la dégénéralice $V_1 V_2$ du cylindre (C_I) .

Lorsque G est entre G_0 et G_1 [où G_1 est l'un des deux points d'intersection G_1 et G'_1 , du cône (P) et de la droite (Δ)], elles sont situées toutes deux dans le demi-espace $z_1 > 0$ (Cas 1).

Lorsque G est en G_1 , elles se confondent avec la génératrice DG_1 du cône (P) .

Lorsque G est entre G_1 et G_3 , elles traversent toutes deux le plan $z_1 = 0$. (Cas 2).

Lorsque G est en G_3 , elles sont symétriques par rapport au plan $z_1 = 0$.

Etudions successivement les cas 1 et 2.

1^{er} cas : deux impulsions accélératrices AA (ou deux impulsions décélératrices DD).

Le point G est situé dans le volume représenté sur la figure 21, ou, plus exactement, sur le segment $G_0 G_1$ (ou $G'_0 G'_1$) de la figure 17. D'où la limitation :

$$(19) \quad |\Delta a_1| = \sqrt{\Delta e_{II}^2 + \left(|\Delta e_1| - \frac{|\Delta j|}{\sqrt{3}} \right)^2} \ll |\Delta a| \ll |\Delta a|_{lim}.$$

Supposons $\Delta a > 0$. Comme dans l'étude des solutions bi-impulsionnelles de type I, la valeur maximale de $\Delta \mathcal{C}$ s'obtient lorsque les deux impulsions accélératrices sont appliquées au premier tour (solution $A_0 A_0$). L'équation (13) montre qu'alors $\Delta \mathcal{C}_{max,2} = \Delta a$ pour chacune des deux solutions bi-impulsionnelles relatives au point G (fig. 23).

2^e cas : une impulsion accélératrice A et une impulsion décélératrice D .

Le point G est situé dans le volume représenté sur la figure 22, ou, plus exactement sur le segment $G_1 G'_1$ de la figure 17, d'où la limitation :

$$(20) \quad |\Delta a| \ll |\Delta a_1| = \sqrt{\Delta e_{II}^2 + \left(|\Delta e_1| - \frac{|\Delta j|}{3} \right)^2}.$$

Comme dans l'étude des solutions bi-impulsionnelles de type II, la valeur maximale de $\Delta \mathcal{C}$ s'obtient lorsque l'impulsion accélératrice $I'AC$ est appliquée au premier tour et l'impulsion décélératrice $I''AC$ au dernier tour (solution $A_0 D_N$).

Pour chacune des solutions bi-impulsionnelles relatives au point G , les équations (12) et (13) dans lesquelles $k' = 0$ et $k'' = N$ et $\Delta \mathcal{C} = \Delta \mathcal{C}_{max,2}$, fournissent une représentation paramétrique en fonction de l'angle φ de la frontière $M_1 M_3$, (fig. 23) séparant les solutions de type III à deux impulsions (type $A_0 D_N$), ou plus, des solutions de type III à trois impulsions (AAD ou ADD), ou plus.

Lorsque, sur la figure 17, G est en G_1 , les deux cordes $V'V''$ passant par G étant confondues avec la génératrice DG_1 du cône (P) , les deux solutions bi-impulsionnelles relatives à G sont identiques (point M_1 de la figure 23).

Lorsque G est en G_2 , l'une des deux cordes $V'V''$ passant par G est la diagonale $V_1 V_3$. Pour la solution bi-impulsionnelle correspondante, $\Delta \mathcal{C}_{max,2} = \Delta \mathcal{C}_{lim}$ (en effet le point g défini sur

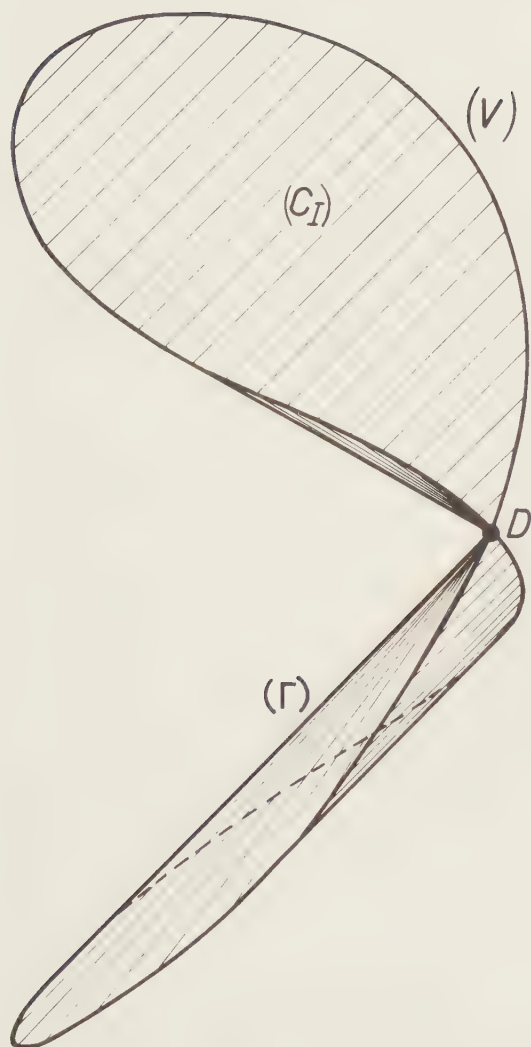
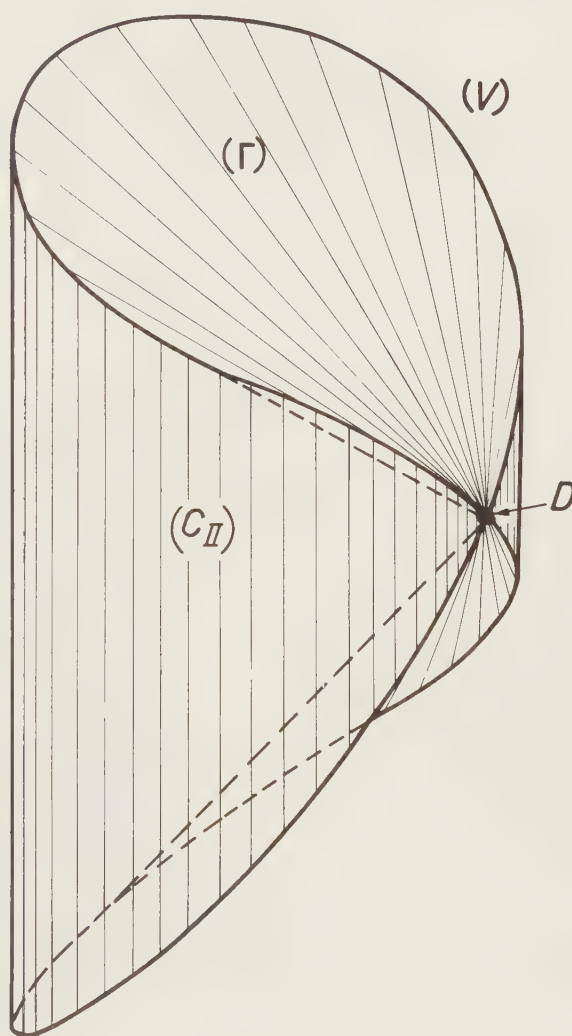


Fig. 21 - Points pouvant être atteints
à l'aide de deux impulsions accélératrices,
(ou de deux impulsions décélératrices)

Fig. 22 - Points pouvant être atteints
à l'aide d'une impulsion accélératrice
et d'une impulsion décélératrice.



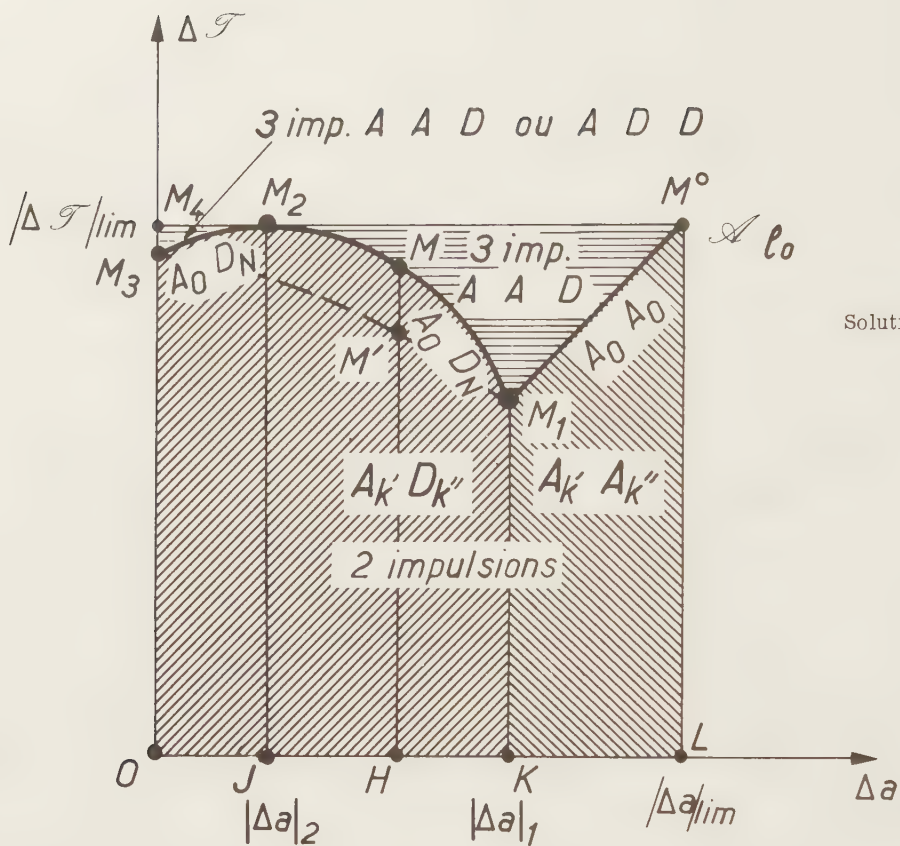


Fig. 23 - Type III.
Solutions bi-impulsionnelles.

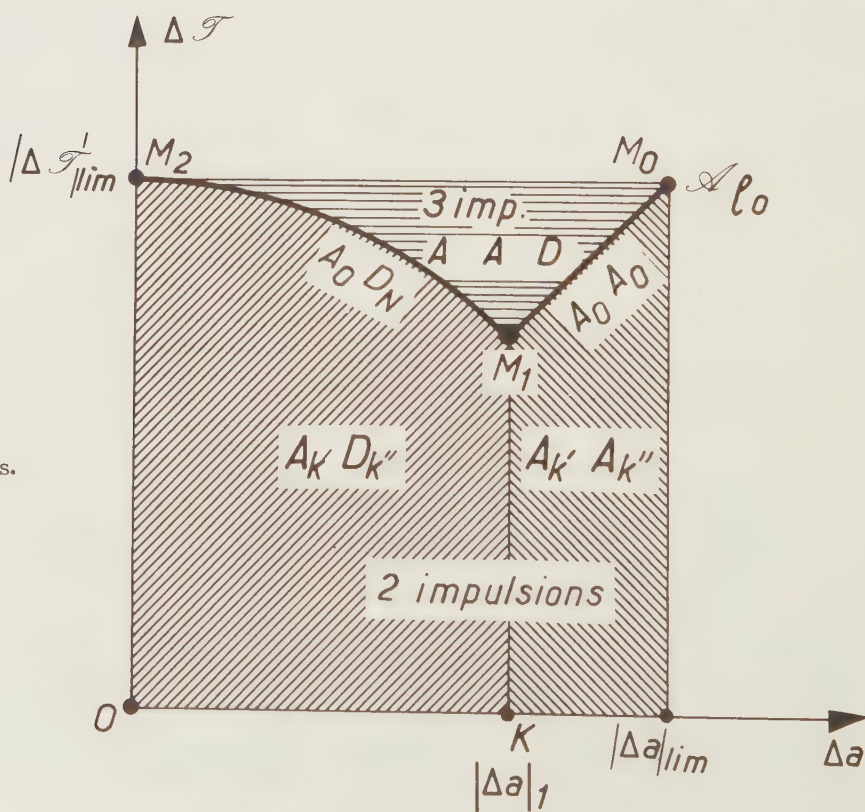


Fig. 24 - Type III.
Solutions bi-impulsionnelles.

Cas $r = 0$.

la figure 20 est alors en G_0) et

$$(21) \quad |\Delta a| = |\Delta a_2| = 2 |\Delta e_{\parallel}| \left(\frac{|\Delta j|}{3|\Delta j| + \sqrt{3}|\Delta e_{\perp}|} \right)^{1/2} < |\Delta e_{\parallel}|.$$

A l'autre corde correspond une solution bi-impulsionnelle plus défavorable ($\Delta \mathcal{C}_{max,2} < \Delta \mathcal{C}_{lim}$).

Lorsque G est en G_3 , les deux cordes passant par G sont symétriques par rapport au plan $Z_j = 0$. Les solutions bi-impulsionnelles correspondantes donnent le même point M_3 .

En conclusion, à chaque point de la région $OKM_1 M' M_3 O$, correspond une double infinité de solutions bi-impulsionnelles de type A_k, D_k . Dans la région $M_3 M' M_1 M M_2 M_3$, il ne lui correspond qu'une simple infinité de telles solutions.

CAS PARTICULIERS.

1. Si G est sur le cylindre (C_X) ($r = \frac{\Delta C}{2}$)
les deux frontières $M_0 M_1 M M_2 M_3$ et $M_0 M_1 M' M_3$ coïncident avec le segment $M_0 M_4$ (cas limite avec les solutions de type II).
2. Si G est en σ , centre du cercle (C), ($r = 0$)
ces deux frontières se composent du segment $M_0 M_1$ et de l'arc de cercle $\widehat{M_1 M_2}$ (fig. 24).

II,6.3.4. TYPE IV.

Plaçons nous dans le cas $\Delta \mathcal{C} > 0$.

Les impulsions accélératrices $I'_0 \Delta C$ et $I''_0 \Delta C$ appliquées au premier tour et les impulsions décélératrices $I'_N \Delta C$, $I''_N \Delta C$ appliquées au dernier tour sont telles que :

$$(22) \quad I'_0 + I''_0 - (I'_N + I''_N) = \frac{\Delta a}{2Y\Delta C} \text{ fixé}$$

$$(23) \quad I'_0 + I''_0 + I'_N + I''_N = \frac{\Delta \mathcal{C}}{2Y\Delta C} = I' + I'' = 1$$

$$(24) \quad I'_0 + I'_N - (I''_0 + I''_N) = I' - I'' = \frac{\Delta e_{\parallel}}{\Delta \mathcal{C}} \frac{|\sin L|}{\sin \delta} \text{ fixé.}$$

De ces deux dernières équations on tire :

$$(25) \quad I'_0 + I'_N = I' \text{ fixé}$$

$$(26) \quad I''_0 + I''_N = I'' \text{ fixé}$$

où I' et I'' sont les grandeurs d'impulsions correspondant à un transfert simple de type I où Δa est remplacé par $\Delta \mathcal{C}$.

L'équation (22) montre alors que $I'_0 + I''_0$ et $I'_N + I''_N$ sont constants.

Le point $\dot{I}$ du plan I'_0, I'_N (fig. 25) peut donc être choisi sur le segment JK fixé (J et K sont sur le pourtour $OBCE$ du rectangle). Il y a dégénérescence de grandeur.

Si le segment JK est dans le triangle OBG (ou bien CEF), l'utilisation du point J ou K permet de ramener la solution quadri-impulsionnelle de type IV à une solution tri-impulsionnelle de type $A_0 D_N D_N$ (ou bien $A_0 A_0 D_N$).

Si le segment JK est dans le parallélogramme $BGEF$, l'utilisation du point J conduit à une solution tri-impulsionnelle de type $A_0 A_0 D_N$ et l'utilisation du point K à une solution tri-impulsionnelle de type $A_0 D_N D_N$.

Enfin, si le segment JK est confondu avec BG (ou FE), l'utilisation du point B (ou E) conduit à une solution bi-impulsionnelle de type $A_0 D_N$.

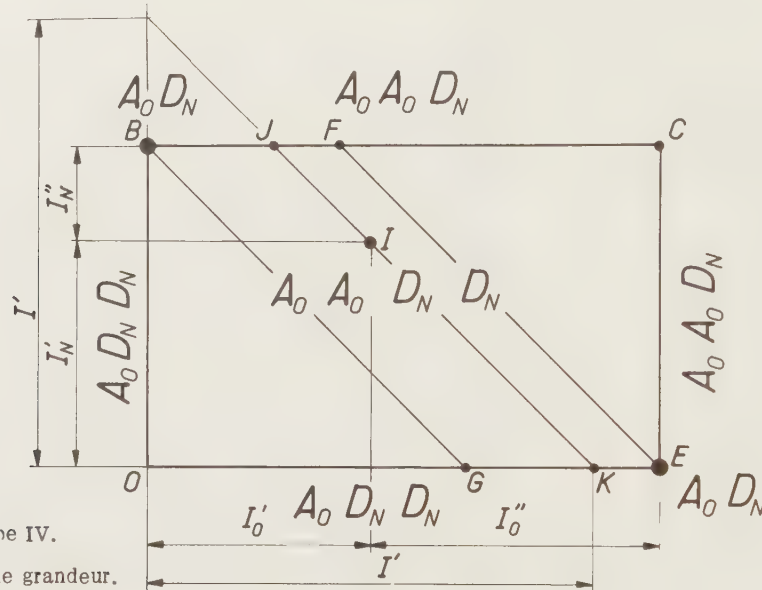


Fig. 25 - Type IV.

Dégénérescence de grandeur.

Cherchons, dans le plan $\Delta \vartheta, \Delta \varphi$ la courbe frontière correspondant à ces solutions bi-impulsionnelles (fig. 11 et 12).

Comme au point E , $I''_0 = I'_0 = 0$ les équations (22 - 24) donnent :

$$(27) \quad \left| \frac{\Delta \vartheta}{\Delta \varphi} \right| = |I' - I''| = \left| \frac{\Delta e_{\parallel}}{\Delta \varphi} \frac{\sin L}{\sin \delta} \right|$$

soit, compte tenu de l'étude du chapitre II,5.,

$$(28) \quad \left| \frac{\Delta \vartheta}{\Delta e_{\parallel}} \right| = \left| \frac{\sin L}{\sin \delta} \right| = \sqrt{1 - x^2} \leq 1$$

où $x = \frac{\sqrt{\Delta \varphi^2 - \Delta e_{\parallel}^2}}{|\Delta e_{\parallel} \tan \delta|}$ est la racine de plus petit module (c'est-à-dire ici de module ≤ 1) de l'équation réciproque du second degré :

$$(29) \quad x^2 + \frac{\Delta \varphi^2 + \Delta j^2 + \Delta e_{\perp}^2 - \Delta e_{\parallel}^2}{|\Delta e_{\perp}| \sqrt{\Delta \varphi^2 - \Delta e_{\parallel}^2}} x + 1 = 0$$

qui ne dépend que du paramètre figurant en coefficient de x . $|\Delta \vartheta|$ est minimum

$$\left(|\Delta \vartheta|_{\min} = \frac{\sqrt{2 |\Delta j| \sqrt{\Delta e_{\perp}^2 + \Delta j^2} - 2 \Delta j^2}}{|\Delta e_{\perp}|} \right)$$

pour $\Delta \varphi = \sqrt{\Delta e_{\perp}^2 + \Delta j^2}$ ($\geq \Delta \varphi_{\lim}$ selon que $|\Delta j| \geq \frac{|\Delta e_{\perp}|}{\sqrt{3}}$)

Lorsque $|\Delta \mathcal{C}| \rightarrow \infty$, $|\Delta a| \rightarrow |\Delta e_{||}|$. Enfin, pour $|\Delta \mathcal{C}| = |\Delta \mathcal{C}|_{lim}$, on retrouve bien

$$|\Delta a| = \begin{cases} |\Delta e_{||}| \\ |\Delta a_2| \end{cases} \quad \text{selon que} \quad |\Delta j| \gtrless \sqrt{3} |\Delta e_{\perp}|.$$

II,6.3.5. TYPE I BIS.

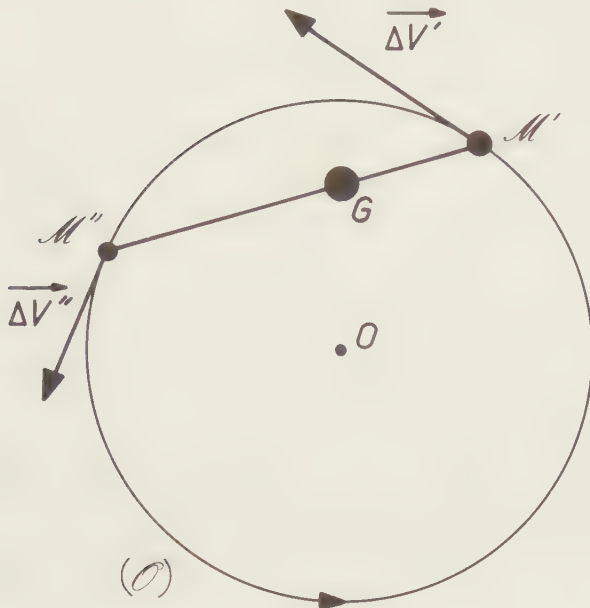


Fig. 26 - Type I bis. Solutions bi-impulsionnelles.

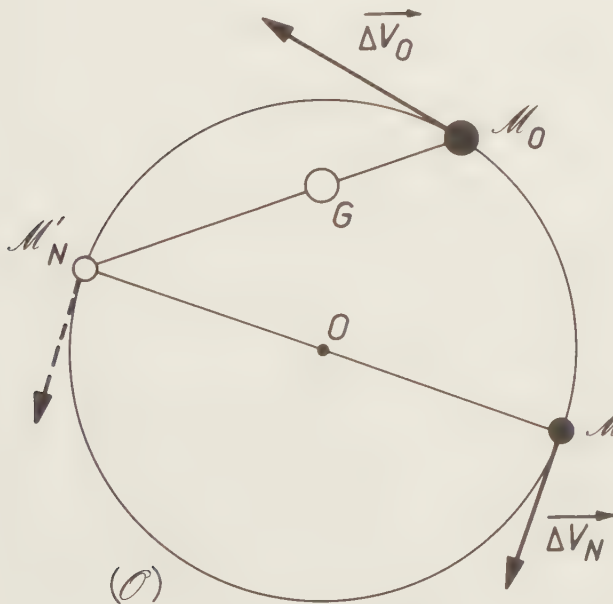


Fig. 27 - Type IV bis. Solutions bi-impulsionnelles.

Il y a ici encore une dégénérescence spatiale et temporelle assez complexe. Aussi nous intéresserons-nous seulement aux solutions bi-impulsionnelles (fig. 26).

Il existe une infinité de solutions bi-impulsionnelles assurant le transfert $\Delta e_{||}$, $\Delta e_{\perp}$, $\Delta j = 0$, $|\Delta a| = 2 \Delta c$. Les impulsions $\Delta V'$ et $\Delta V''$ tangentes sont telles que le centre de gravité des masses $\Delta V'$ et $\Delta V''$ placées aux points d'application M' et M'' , soit en G tel que

$$(30) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{\Delta e}}{\Delta a}.$$

La donnée d'une corde quelconque $M'M''$ passant par G fixe le rapport $\Delta V''/\Delta V'$ des impulsions et donc la solution.

Il y a dégénérescence spatiale des solutions bi-impulsionnelles.

De plus, une solution bi-impulsionnelle particulière étant choisie, il existe une dégénérescence temporelle (de seconde espèce) semblable à celle rencontrée dans l'étude du type I. [Equation (10)].

II,6.3.6. TYPE IV BIS.

Il n'y a plus ici de dégénérescence temporelle puisque, par exemple si $\Delta \mathcal{C} > 0$, toutes les accélérations sont faites au premier tour ($\mathcal{A}_0$) et les décélérations au dernier tour ($\mathcal{D}_N$).

Il subsiste cependant une dégénérescence spatiale : les solutions $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{D}_N$ sont du type I bis dégénéré et le point M du segment $\mathcal{A}_0 \mathcal{D}_N$ s'obtient par combinaison linéaire de ces deux solutions (fig. 9).

Les points $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{D}_N$ pouvant, tous deux, et d'une infinité de façons, être obtenus en particulier par des solutions bi-impulsionnelles, le point M peut être obtenu, en particulier, et d'une infinité de façons par des solutions quadri-impulsionnelles ou mieux, d'une simple ou double infinité de façons par des solutions tri-impulsionnelles, à cause de la dégénérescence de grandeur déjà signalée pour les solutions de type IV (fig. 25).

$$(35) \quad \left| 1 - \rho \right| < 0 \omega = \frac{\left| \overrightarrow{\Delta e} \right|}{2 \Delta C} (1 + \rho) < 1 + \rho.$$

La seconde inégalité

$$\left| \overrightarrow{\Delta e} \right| < 2 \Delta C$$

est automatiquement satisfaite dans la zone IV bis car :

$$\left| \Delta e \right| = \left| \Delta \mathcal{C} \right|_{lim} < \left| \Delta \mathcal{C} \right| = 2 \Delta C.$$

La première inégalité s'écrit encore :

$$(36) \quad \left| \Delta \vartheta \right| < \left| \overrightarrow{\Delta e} \right| = \left| \Delta \vartheta \right|_{lim}.$$

Il n'y a donc de solutions bi-impulsionnelles (une impulsion au premier tour et une impulsion au dernier tour) que dans la bande $\left| \Delta \vartheta \right| < \left| \Delta \vartheta \right|_{lim}$ (fig. 13).

II,6.4. CONCLUSION.

L'étude des rendez-vous impulsions économiques de longue durée entre orbites quasi-circulaires proches non coplanaires se déduit simplement de l'étude des transferts simples correspondants. Le domaine accessible correspondant à la vitesse caractéristique ΔC s'obtient en remplaçant $\left| \Delta \vartheta \right|$ par $\max(\left| \Delta \vartheta \right|, \left| \Delta \mathcal{C} \right|)$ dans l'étude du transfert simple, avec

$$\Delta \mathcal{C} = -\frac{4}{3} \frac{\Delta \tau}{\Delta L} + \Delta \vartheta.$$

La solution optimale est d'un des quatre types I, I bis, II ou III déjà rencontrés au chapitre II,5, ou de deux types nouveaux : types IV et IV bis.

Le nombre minimal d'impulsions est égal à 3 ou 2 suivant le rendez-vous considéré.



CONCLUSION

L'étude analytique des transferts optimaux entre orbites elliptiques proches est beaucoup plus délicate pour les systèmes de propulsion ($\mathcal{S}_1$) à vitesse d'éjection constante et à poussée limitée que pour les systèmes de propulsion ($\mathcal{S}_2$) à vitesse d'éjection variable et à puissance limitée où la solution analytique générale peut être obtenue. Cela est dû au fait que la loi de poussée optimale "tout-ou-rien" obtenue pour les systèmes de propulsion ($\mathcal{S}_1$) introduit des non-linéarités, même dans l'étude linéarisée (orbites proches).

Malgré les simplifications apportées par le choix des éléments orbitaux comme composantes d'état (ce qui assure, dans l'étude linéarisée, un adjoint constant), trois difficultés essentielles subsistent dans le cas des systèmes de propulsion ($\mathcal{S}_1$) :

1. **Détermination de la loi de poussée optimale**, c'est-à-dire de la succession des arcs de poussée et des arcs balistiques, en fonction de l'adjoint fixé a priori. Cette détermination est facilitée par l'utilisation des notions de "vecteur efficacité" (indiquant la direction de la poussée optimale), d' "orbite directrice" (lieu de l'extrémité du vecteur efficacité, d'origine le mobile, dans les axes absolus) et de "courbe d'efficacité" (lieu de cette extrémité dans les axes tournants). Il n'y a (sauf cas singulier) pas plus de trois arcs de poussée maximale par révolution pour un transfert simple. Dans les cas singuliers (du problème linéarisé) la loi de poussée optimale est partiellement arbitraire (dégénérescence de la solution). De tels cas ne se rencontrent que dans les transferts entre quasi-cercles (excentricité de l'ordre de l'importance du transfert). La dégénérescence disparaît lorsque l'étude est poussée aux ordres supérieurs.
2. **Intégration** - L'intégration des équations différentielles donnant les variations des éléments orbitaux et la consommation, dans lesquelles la loi de poussée optimale a été introduite, est délicate. Les intégrales à calculer sont, en général, de type elliptique, ou plus compliqué.
3. **Inversion** - La détermination, a posteriori, de l'adjoint en fonction des données du transfert ne peut se faire, en général, que par approximations successives.

Ces difficultés expliquent la rareté des résultats généraux qu'il est possible d'obtenir.

Les phénomènes d' "induction" (variations, non imposées, de certains éléments orbitaux induites par les variations imposées des autres éléments orbitaux) peuvent cependant être étudiés en détail. •

La solution analytique complète peut être obtenue dans un certain nombre de cas particuliers dont l'étude se complique au fur et à mesure que les éléments orbitaux dont la variation est imposée sont plus nombreux. Un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, dont certaines peuvent être cumulées, doit être fait en contrepartie (grand nombre de révolutions, orbites quasi-circulaires, impulsions, etc...). Fort heureusement, ces hypothèses simplificatrices correspondent à des cas pratiques très fréquents.

L'étude des cas particuliers montre que la non modulation de la vitesse d'éjection entraîne, pour les systèmes de propulsion ($\mathcal{S}_1$) et par rapport aux systèmes de propulsion ($\mathcal{S}_2$) de même puissance, une pénalisation sur la consommation de masse de l'ordre de 20 à 30 % si la poussée maximale est appliquée de façon continue (système $\mathcal{S}_{1c}$), et une pénalisation moindre si la vitesse d'éjection (constante) est optimisée (système $\mathcal{S}_1^*$).

RÉFÉRENCES

- [1] Y. THIRY. — Cours de Mécanique Céleste. Faculté des Sciences de Paris.
- [2] P. CONTENSOU. — *Note sur la cinématique générale du mobile dirigé*. Communication à l'Association Technique Maritime et Aéronautique, vol. 45, n° 836, (juin 1946).
- [3] P. CONTENSOU. — *Application des méthodes de la mécanique du mobile dirigé à la théorie du vol plané*. Communication à l'Association Technique Maritime et Aéronautique, vol. 49, n° 958, (Session 1950).
- [4] P. CONTENSOU. — *Etude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation. Application au cas d'un centre d'attraction unique*. Astronautica Acta, 8, (1962), p. 134-150. Symposium de l'Académie 1961.
- [5] L.S. PONTRYAGIN, V.G. BOLTYANSKII, R.V. GAMKRELIDZE and E.F. MISHCHENKO. — The Mathematical Theory of Optimal Processes. (Interscience Publishers, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1962).
- [6] L.I. ROZONOER. — *Principe du Maximum de L.S. Pontryagin dans la théorie des systèmes optimaux*. Automatismes et Télémécanique, tome 20, n° 10, 11, 12 (1959).
- [7] W. HOHMANN. — *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper*. Oldenbourg, Munich (1925). *The attainability of heavenly bodies*. N.A.S.A. Technical Translation F.44 (1960).
- [8] R.F. HOELKER and R. SILBER. — *The bi-elliptical transfer between co-planar circular orbits*. Proceeding of the Fourth AFBD/STL Symposium : Advances in Ballistic Missile and Space Technology, vol. 3, (Pergamon Press, 1961).
- [9] D.F. LAWDEN. — *Impulsive transfers between elliptical orbits*. Optimization Techniques (Academic Press, 1962), ch. 11, p. 323-351.
- [10] J.V. BREAKWELL. — *Minimum impulse transfer*. A.I.A.A. Progress in Astronautics and Aeronautics : Celestial Mechanics and Astrodynamics (Academic Press Inc., New-York, vol. 14, (1964)), p. 583-589.
- [11] J.P. MAREC. — *Transferts orbitaux économiques : orbites elliptiques coplanaires coaxiales. Durée non limitée*. Rech. Aér., n° 105, (1965).
- [12] C. MARCHAL. — *Transferts optimaux entre orbites elliptiques (durée indifférente)*. Astrodynamics (Gauthier-Villars, Paris, 1966) - Communication présentée au XVI^e Congrès International d'Astronautique (Athènes, 12-18 septembre 1965).
- [13] C. MARCHAL. — *Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires (durée indifférente)*. Astronautica Acta, 11, (1965), p. 432-445.
- [14] C. MARCHAL. — *Transferts optimaux entre orbites hyperboliques. (Rayon planétaire non nul)*. Communication présentée au 17^e Congrès International d'Astronautique, Madrid, (9-15 octobre 1966).
- [15] C. MARCHAL. — *Transferts optimaux entre orbites elliptiques (durée indifférente)*. Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences de Paris et Publ. O.N.E.R.A., n° 120, (1967).

- [16] J.V. BREAKWELL. — *Conditions for optimality of three impulse transfer between quasi-circles.* Correspondance privée.
- [17] H.G. MOYER. — *Necessary conditions for optimal single impulse transfer.* A.I.A.A. J., 4, (1966), p. 1405-1410.
- [18] C.B. WINN. — *Minimum-fuel transfers between coaxial orbits, both coplanar and non coplanar.* A.A.S. Preprint 66 - 119, (July 1966).
- [19] H. HILLER. — *Optimum impulsive transfers between non-coplanar elliptic orbits having collinear major axes.* Planetary and Space Science, 13, (1965), p. 147-161.
- [20] T.N. EDELBAUM. — *How many impulses ?* A.I.A.A. Paper, No. 66-7 (January 1966). A paraître dans Astronautics and Aeronautics.
- [21] D.F. LAW DEN. — *Optimal Trajectories for Space Navigation.* (Butterworths Mathematical Texts, Butterworths, London 1963).
- [22] G. LEITMANN. — *Variational problems with bounded control variables.* Optimization Techniques (Academic Press 1962), ch. 5.
- [23] V.K. ISAEV and V.V. SONIN. — *On a non-linear problem of optimum control. Problem formulation. Optimum control structure. First Integrals.* Revue russe : Automatisme et Télémécanique, 23, (1962), p. 1117-1129.
- [24] V.K. ISAEV. — *On certain features of the Mayer variational problem in rocket dynamics.* Revue russe : Automatisme et Télémécanique, 26, (1965), p. 1161-1168.
- [25] B. FRAEIJIS DE VEUBEKE. — *Canonical transformations and the thrust-coast-thrust optimal transfer problem.* Astronautica Acta, 11, (1965), p. 271-282.
- [26] H.M. ROBBINS. — *An analytical study of the impulsive approximation.* A.I.A.A. J., 4, (1966), p. 1417-1423.
- [27] S. PINES. — *Constants of the motion for optimum thrust trajectories in a central force field.* A.I.A.A. J., 2, (1964), p. 2010-2014.
- [28] V.K. ISAEV and Y.M. KOPNIN. — *A review of some qualitative results obtained in flight dynamics by an optimal processes theory.* Présenté au 17^e Congrès International d'Astronautique, Madrid (9-15 octobre 1966).
- [29] M. HANDELSMAN. — *Some necessary conditions for optimal fixed-time powered transfers with multiple coasts and burns between circular orbits.* Communication présentée au 17^e Congrès International d'Astronautique, Madrid (9-15 octobre 1966).
- [30] B. FRAEIJIS DE VEUBEKE. — *Optimal steering and cutoff-relight programs for orbital transfers.* Astronautica Acta, 12, (1966), p. 323-328.
- [31] D.F. LAW DEN. — *Optimal intermediate thrust arcs in a gravitational field.* Astronautica Acta, 8, (1962), p. 106-123.
- [32] H.J. KELLEY, R.E. KOPP and H.G. MOYER. — *Singular extremals. Optimization Theory and Applications.* (Academic Press), vol. I.A, Variational Approach, ch. 3.
- [33] C. MARCHAL. — *Généralisation tri-dimensionnelle et étude de l'optimalité des arcs à poussée intermédiaire de Lawden.* Astronautica Acta (à paraître).
- [34] J.H. IRVING. — *Low - Thrust Flight : variable exhaust velocity in gravitational fields.* Space Technology (John Wiley and Sons, New York 1959), ch. 10.
- [35] W.G. MELBOURNE and G.G. SAUER. — *Optimum interplanetary rendez-vous with power-limited vehicles.* A.I.A.A. J., 1, (1963), p. 54-60.
- [36] S. ROSS and G. LEITMANN. — *Low acceleration trajectory optimization in a strong central force field.* Proceedings of the I.A.S. Symposium on Vehicle System Optimizations (Institute of Aerospace Sciences, New York, 1961), p. 127-137.

- [37] T.N. EDELBAUM. — *Optimum low-thrust rendez-vous and station Keeping*. A.I.A.A. J., 2, (1964), p. 1196-1201.
- [38] F.W. GOBETZ. — *Optimal variable -thrust transfer of a power limited rocket between neighboring circular orbits*. A.I.A.A. J., 2, (1964), p. 339-343.
- [39] F.W. GOBETZ. — *A linear theory of optimum low-thrust rendez-vous trajectories*. The Journal of the Astronautical Sciences, 12, (1965), p. 69-76.
- [40] T.N. EDELBAUM. — *Optimum power-limited orbit transfer in strong gravity fields*. A.I.A.A. J., 3, (1965), p. 921-925.
- [41] J.E. Mc INTYRE and L. CROCCO. — *Optimal transfer between close circular orbits using the Pontryagin maximum principle*. A.I.A.A. J., Preprint No. 64-29. Aerospace Sciences Meeting, New York (N.Y.), (January 20-22, 1964).
- [42] J.E. Mc INTYRE. — *Optimal transfer of a thrust limited vehicle between coplanar circular orbits*. Ph.D. Thesis-Department of Aerospace and Mechanical Sciences. Princeton University - Princeton (N.J.) U.S.A., (1964).
- [43] J.E. Mc INTYRE and L. CROCCO. — *Linearized treatment of the optimal transfer of a thrust limited vehicle between coplanar circular orbits*. Astronautica Acta, 12, (1966), p. 224-234.
- [44] J.E. Mc INTYRE and L. CROCCO. — *Higher order treatment of the optimal transfer of thrust-limited vehicles between coplanar circular orbits*. Astronautica Acta, 13, No. 1, (January - February 1967).
- [45] J.P. MAREC. — *Transferts économiques entre orbites infiniment proches*. Astrodynamics (Gauthier-Villars, Paris, 1966). Communication présentée au XVI^e Congrès International d'Astronautique. (Athènes, 12-18 septembre 1965).
- [46] J.P. MAREC. — *Transferts économiques plans de type Hohmann entre orbites quasi-circulaires, coaxiales, proches. (Durée fixée, poussée limitée)*. Astronautica Acta, vol. 13, n° 2, (1967).
- [47] J.P. MAREC. — *Transferts infinitésimaux, impulsionnels, économiques, entre orbites quasi-circulaires, non coplanaires*. Note aux C. R. Ac. des Sc., (séance du 16 mai 1966), présentée par M. Paul GERMAIN. Aussi : communication présentée au 17^e Congrès International d'Astronautique, Madrid (9-15 octobre 1966). Aussi : Publ. O.N.E.R.A., n° 115, (1966).
- [48] F.W. GOBETZ, M. WASHINGTON and T.N. EDELBAUM. — *Minimum-impulse time-free transfer between elliptic orbits*. (United Aircraft Research Laboratories Report No. 910330-4, April 1966).
- [49] T.N. EDELBAUM. — *A general solution for minimum impulse transfers in the near vicinity of a circular orbit*. (Analytical Mechanics Associates, Inc. Report, August 1966) Contract NAS 12-26.
- [50] A.K. PLATONOV, A.A. DASHKOV and V.N. KUBASOV. — *Optimization of space vehicles flight control*. Présenté au Symposium I.F.A.C. à Stavanger (Norvège), (21-23 juin 1965).
- [51] A.K. PLATONOV. — *Investigation of the correctional manoeuvre peculiarities for space flights*. Astrodynamics (Gauthier-Villars, Paris, 1966). Communication présentée au 16^e Congrès International d'Astronautique. Athènes (1965).
- [52] H.K. HINZ. — *Optimal low-thrust near-circular orbit transfer*. A.I.A.A. J., 1, (1963), p. 1367-1371.
- [53] J.F. TSCHAUNER and P.R. HEMPEL. — *Minimum-fuel rendez-vous techniques*. Journal of Spacecraft and Rockets, 2, (1965), p. 802-804.
- [54] J.F. TSCHAUNER. — *Neue Darstellung des Rendezvous bei elliptischer Zielbahn*. Astronautica Acta, 11, (1965), p. 312-321.
- [55] H. GIRARD. — *Application de la méthode du gradient à l'étude numérique des transferts à puissance limitée entre orbites circulaires coplanaires proches. Comparaison avec la solution linéarisée*. N.T. O.N.E.R.A., n° 112, (1967).



ANNEXE 1

DÉTERMINATION DE LA VITESSE D'ÉJECTION OPTIMALE POUR UNE MISSION DONNÉE (SYSTÈME S_1) (voir § I, 2.3.3.)

Comme c'est mf (ou, ce qui revient au même $-C_f/W$) et non $-C_f$ qui doit être maximisé, il faut utiliser les équations du mouvement (I, 2 - 11) - (I, 2 - 13) auxquelles il faut ajouter :

$$(1) \quad \dot{W} = 0$$

exprimant que la vitesse d'éjection W est constante.

La partie utile de l'Hamiltonien optimal s'écrit :

$$(2) \quad H^* = \frac{F^*}{m} \left(|\vec{p}_V| - \frac{mp_m}{W} \right) + \dots = \frac{\Theta U(\Theta) F_{max}(W)}{m} + \dots$$

où

$$(3) \quad \Theta = |\vec{p}_V| - \frac{mp_m}{W} \left(= |\vec{p}_V| + p_c \right)$$

est la fonction de commutation.

Il est important de remarquer que la borne :

$$(4) \quad F_{max} = \frac{2P_{max}}{W}$$

dépend de l'état (par W).

La composante de l'adjoint associée à W est donnée par :

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{p}_W &= - \frac{\partial H^*}{\partial W} = \frac{\Theta U(\Theta)}{m} \frac{\partial F_{max}}{\partial W} + \frac{F_{max}}{m} \frac{d[\Theta U(\Theta)]}{d\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial W} = \\ &= \frac{\Theta U(\Theta)}{m} \left(- \frac{2P_{max}}{W^2} \right) + \frac{F_{max}}{m} \cdot U(\Theta) \cdot \left(\frac{mp_m}{W^2} \right) = \\ &= \frac{2P_{max} U(\Theta)}{mW^2} \left(\frac{mp_m}{W} - \Theta \right) = - \frac{2P_{max} U(\Theta)}{mW^2} (\Theta + p_c) \end{aligned}$$

et

$$(6) \quad p_{W_0} = p_{W_f} = 0$$

puisque W est indifférent.

En intégrant $\dot{p}_W$ de t_0 à t_f , il vient donc :

$$(7) \quad \int_{t_0}^{t_f} \frac{U(\Theta)}{m} (\Theta + p_c) dt = 0$$

qui n'est autre que l'équation (I,2 - 43).



ANNEXE 2

VECTEUR PÉRIGÉE (voir § I, 2.4.1)

A2.1 - INTÉGRALE PREMIÈRE DE LAPLACE [1]

Dans le champ newtonien central, de centre O (fig. I, 2 - 9) calculons le produit vectoriel $\frac{1}{\mu} \vec{r} \wedge \vec{h}$ pour un mouvement képlérien :

$$\frac{1}{\mu} \vec{r} \wedge \vec{h} = \frac{1}{\mu} \vec{g} \wedge \vec{h} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \wedge \vec{h} = -\frac{h}{r^2} \vec{X} \wedge \vec{Z}$$

soit

$$(1) \quad \frac{1}{\mu} \vec{r} \wedge \vec{h} = \dot{\theta} \vec{Y} = \dot{\vec{X}}$$

d'où, en intégrant :

$$(2) \quad \boxed{\frac{1}{\mu} \vec{V} \wedge \vec{h} - \frac{\vec{r}}{r} = \text{vecteur constant} = \vec{e}}$$

c'est l'intégrale première (vectorielle) de LAPLACE (trois intégrales premières scalaires).

Mise sous la forme :

$$(3) \quad -\vec{Z} \wedge \vec{V} = \mu \frac{\vec{e}}{h} + \mu \frac{\vec{X}}{h}$$

elle fournit directement l'hodographe $(\mathcal{H}')$ qui se déduit de l'hodographe $(\mathcal{H})$ par la rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{OZ}$. C'est un cercle de centre $\vec{I}$ défini par :

$$(4) \quad \vec{OI} = \mu \frac{\vec{e}}{h}$$

et de rayon μ/h (fig. 1).

On en déduit immédiatement la trajectoire $(\mathcal{O})$ car, dans tout mouvement à accélération centrale, la trajectoire $(\mathcal{O})$ et l'hodographe tourné $(\mathcal{H}')$ sont polaires réciproques par rapport au cercle (σ) de centre O et de rayon $\sqrt{h}$.

En effet :

$$(5) \quad OH \cdot OV' = h = \text{Cte}$$

ce qui montre que la tangente $\vec{MV}$ à la trajectoire $(\mathcal{O})$ n'est autre que la polaire du point V' par rapport au cercle (σ) .

Le point H , inverse de V' par rapport à (σ) décrit le cercle $(\mathcal{C})'$, inverse du cercle $(\mathcal{H}')$ par rapport à (σ) . Donc, la droite HM enveloppe la conique $(\mathcal{O})$ de foyer O et de cercle principal $(\mathcal{C})$.

Il est d'autre part aisé de démontrer que :

$$(6) \quad |\vec{e}| = e$$

donc

(7)

$$\mu \dot{\vec{e}} = \vec{\gamma} \wedge \vec{h} + V \wedge (\vec{r} \wedge \vec{\gamma})$$

Lorsque l'accélération perturbatrice est nulle ($\vec{\gamma} = 0$), $\dot{\vec{e}} = 0$. Le vecteur $\vec{e}$ est donc bien constant pour un mouvement képlérien.



ANNEXE 3

ÉLÉMENTS DE LA MATRICE K

(voir § I, 3.1.4)

avec : $a=1$, $n=1$, $b=\sqrt{1-e^2}$, $h=\sqrt{1-e^2}$, $p=1-e^2$, $r=1-e \cos u$

	$e \neq 0$	$e = 0$
$K_{\xi Z}$	$\frac{r}{h} \sin L = \sin u$	$\sin L$
$K_{\eta Z}$	$-\frac{r}{h} \cos L = -\frac{\cos u - e}{b}$	$-\cos L$
K_{ax}	$\frac{2e}{b} \sin L = \frac{2e}{r} \sin u$	0
K_{ay}	$2 \frac{b}{r}$	2
$K_{\alpha x}$	$b \sin L = \frac{p}{r} \sin u$	$\sin L$
$K_{\alpha y}$	$b (\cos L + \cos u) = \frac{b}{r} (2 \cos u - e \cos^2 u - e)$	$2 \cos L$
$K_{\beta x}$	$-b \cos L = -\frac{b}{r} (\cos u - e)$	$-\cos L$
$K_{\beta y}$	$b \sin L + \sin u = \frac{\sin u (2 - e \cos u - e^2)}{r}$	$2 \sin L$
$K_{\tau x}$	$-2r + \frac{3Me \sin L}{b} = -2r + \frac{3Me \sin u}{r}$	-2
$K_{\tau y}$	$\frac{3bM}{r}$	3L

ANNEXE 4

TRANSFORMATION CANONIQUE

(voir § I, 3.2.1)

La transformation canonique envisagée est :

$$(1) \left(\vec{r}, \vec{V}, t ; \vec{p}_r, \vec{p}_V, H \right) \Longrightarrow \begin{cases} \left(\vec{\mathcal{X}}, u ; \vec{p}, \mathcal{H} \right) \\ \text{ou bien} \\ \left(\vec{Z}_{plan}, a, \vec{e}_{plan}, \tau, u ; \vec{p}_Z, p_a, \vec{p}_e, p_\tau, \mathcal{H} \right) \end{cases}$$

les variables m (ou $\mathcal{C}$, ou $\mathcal{J}$) étant conservées. La condition suffisante pour que ce changement de variables soit canonique s'écrit :

$$(2) \quad \vec{p}_r \cdot d\vec{r} + \vec{p}_V \cdot d\vec{V} - H dt \equiv \vec{P} \cdot d\vec{\mathcal{X}} - \mathcal{H} du \equiv \vec{p}_Z \cdot d\vec{Z} + p_a da + \vec{p}_e \cdot d\vec{e} + p_\tau d\tau - \mathcal{H} du.$$

Dans l'identification des termes en $d\vec{V}$ pour $d\vec{r}=0$, $dt=0$ (position et temps fixés), on a évidemment :

$$(3) \quad d\vec{\mathcal{X}} = \vec{K} \cdot d\vec{V}$$

$$(4) \quad d\vec{Z} = \frac{1}{h} d(\vec{r} \wedge \vec{V}) = \frac{\vec{r}}{h} \wedge d\vec{V}$$

$$(5) \quad da = 2 dE = 2 d \left(\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 2 \vec{V} \cdot d\vec{V}$$

$$(6) \quad d\vec{e} = d \left(\vec{V} \wedge \vec{h} - \frac{\vec{r}}{r} \right) = d\vec{V} \wedge \vec{h} + \vec{V} \wedge d\vec{h} = d\vec{V} \wedge \vec{h} + \vec{V} \wedge (\vec{r} \wedge d\vec{V})$$

$$(7) \quad d\tau = \frac{3}{2} M da + \vec{R} \cdot d\vec{e}$$

d'où :

$$(8) \quad \vec{p}_V = \vec{P} \cdot \vec{K} = 2 p_a, \vec{V} + h \wedge \vec{p}_e, + \left(\vec{p}_e \wedge \vec{V} + \frac{\vec{p}_Z}{h} \right) \wedge \vec{r}$$

avec

$$(9) \quad p_{a_1} = p_a + \frac{3M}{2} p_\tau$$

$$(10) \quad \overrightarrow{p_{e_1}} = \overrightarrow{p_e} + \overrightarrow{\mathcal{R}} p_\tau.$$

Ces équations coïncident avec les équations (I,3.41 - 43).



ANNEXE 5

ÉLÉMENTS DE L'ORBITE DIRECTRICE NOMINALE

(voir § I, 3.2.2)

Les différences $\overrightarrow{Dh}$, $\overrightarrow{De}$ et DE ont été calculées au § I, 2.4.3 [Equations (I, 2.63-65)]

$$(1) \quad \overrightarrow{Dh} = \overrightarrow{h_p} - \overrightarrow{h} = \overrightarrow{p_v} \wedge \overrightarrow{V} + \overrightarrow{r} \wedge \dot{\overrightarrow{p_v}}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{De} = \overrightarrow{e_p} - \overrightarrow{e} = \dot{\overrightarrow{p_v}} \wedge \overrightarrow{h} + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{Dh} - \frac{\overrightarrow{p_v}}{r} + \frac{\overrightarrow{r}}{r^3} (\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p_v})$$

$$(3) \quad DE = \frac{Da}{2} = \overrightarrow{V} \cdot \dot{\overrightarrow{p_v}} + \frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p_v}}{r^3}$$

avec [voir § I, 3.2.1., équation (I, 3.41)] :

$$(4) \quad \overrightarrow{p_v} = 2p_a \overrightarrow{V} + \overrightarrow{h} \wedge \overrightarrow{p_e} + \left(\overrightarrow{p_e} \wedge \overrightarrow{V} + \frac{\overrightarrow{p_z}}{h} \right) \wedge \overrightarrow{r} + p_\tau (3M \overrightarrow{V} - 2 \overrightarrow{r}) .$$

La valeur de $\dot{\overrightarrow{p_v}} = - \overrightarrow{p_r}$ calculée sur l'orbite nominale ($\overrightarrow{\theta}$) (c'est-à-dire à éléments et adjoint constants) est :

$$(5) \quad \dot{\overrightarrow{p_v}} = 2p_a \left(- \frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \right) + \left[\overrightarrow{p_e} \wedge \left(- \frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \right) \right] \wedge \overrightarrow{r} + \left(\overrightarrow{p_e} \wedge \overrightarrow{V} + \frac{\overrightarrow{p_z}}{h} \right) \wedge \overrightarrow{V} + p_\tau \left[3 \overrightarrow{V} + 3M \left(- \frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \right) - 2 \overrightarrow{V} \right]$$

D'où, en portant $\overrightarrow{p_v}$ et $\dot{\overrightarrow{p_v}}$ dans (1) - (3) :

$$(6) \quad \overrightarrow{Dh} = \overrightarrow{p_z} \wedge \overrightarrow{Z} + \overrightarrow{p_e} \wedge \overrightarrow{e} - p_\tau \overrightarrow{h}$$

$$(7) \quad \overrightarrow{De} = \frac{\overrightarrow{p_z}}{\sqrt{1-e^2}} \wedge \overrightarrow{e} + \sqrt{1-e^2} \overrightarrow{p_e} \wedge \overrightarrow{Z}$$

$$(8) \quad Da = -2p_\tau$$

équations qui coïncident avec les équations (I, 3.47 - 49).



ANNEXE 6

ÉLÉMENTS DE LA MATRICE $B = r K K^T$

(voir § I, 3.2.5)

	$e \neq 0$	$e = 0$
$B_{\xi\xi}$	$(1 - e \cos u) \sin^2 u = 1 - e \cos u - \cos^2 u + e \cos^3 u = P_{3\xi\xi}(\cos u)$	$\sin^2 L$
$B_{\eta\eta}$	$\frac{1}{b^2} (\cos u - e)^2 (1 - e \cos u) =$ $\frac{1}{b^2} [e^2 - e(2 + e^2) \cos u + (1 + 2e^2) \cos^2 u - e \cos^3 u] = P_{3\eta\eta}(\cos u)$	$\cos^2 L$
$B_{\xi\eta}$	$\frac{1}{b} \sin u (\cos u - e) (1 - e \cos u) = \sin u Q_{2\xi\eta}(\cos u)$	$\sin L \cos L$
B_{aa}	$4(1 + e \cos u) = P_{1aa}(\cos u)$	4
$B_{a\alpha}$	$4b^2 \cos u = P_{1a\alpha}(\cos u)$	$4 \cos L$
$B_{a\beta}$	$4b \sin u = \sin u Q_{0a\beta}(\cos u)$	$4 \sin L$
$B_{a\tau}$	$-4e \sin u (1 - e \cos u) + 6M(1 + e \cos u)$	6L
$B_{\alpha\alpha}$	$b^2 (1 - 3e \cos u + 3 \cos^2 u - e \cos^3 u) = P_{3\alpha\alpha}(\cos u)$	$1 + 3 \cos^2 L$
$B_{\alpha\beta}$	$b \sin u [-e + (3 - e^2) \cos u - e \cos^2 u] = \sin u Q_{2\alpha\beta}(\cos u)$	$3 \sin L \cos L$
$B_{\alpha\tau}$	$-2(1 - e^2) \sin u (1 - e \cos u) + 6M(1 - e^2) \cos u$	$-2 \sin L + 6L \cos L$
$B_{\beta\beta}$	$4 - 3e^2 - e(2 - e^2) \cos u + (2e^2 - 3) \cos^2 u + e \cos^3 u = P_{3\beta\beta}(\cos u)$	$4 - 3 \cos^2 L$
$B_{\beta\tau}$	$2\sqrt{1 - e^2} (\cos u - e) / (1 - e \cos u) + 6M\sqrt{1 - e^2} \sin u$	$2 \cos L + 6L \sin L$
$B_{\tau\tau}$	$4(1 - e \cos u)^3 - 12Me \sin u (1 - e \cos u) + 9M^2(1 + e \cos u)$	$4 + 9L^2$

ANNEXE 7

(induction) (voir § I, 4.2.2)

Eléments dont la variation est imposée	$e \neq 0$									$e = 0$						
	$d^* P$	$d^* Q$	$n_{1 \max} \leq$	$\Delta \xi$	$\Delta \eta$	$\Delta \alpha$	$\Delta \alpha$	$\Delta \beta$	$\vec{p}_v$ fonction de	$n_{1 \max} \leq$	$\Delta \xi$	$\Delta \eta$	$\Delta \alpha$	$\Delta \alpha$	$\Delta \beta$	Classes faisant double emploi
ξ	$\begin{smallmatrix} 3 \\ (r) \end{smallmatrix}$		2		0	0	0	0	$\sin L$ ou $\cos L$	2		0	0	0	0	×
η	$\begin{smallmatrix} 3 \\ (r) \end{smallmatrix}$		2	0		0	0	0	$\sin L$ ou $\cos L$	2	0		0	0	0	
α	1		1	0	0			0	$\sin L$ ou $\cos L$	1	0	0		0	0	
α	3		3	0	0			0	$\sin L$ ou $\cos L$	2	0	0	0		0	
β	3		3	0	0	0	0		$\sin L$ ou $\cos L$	2	0	0	0	0		×
$\xi \eta$	$\begin{smallmatrix} 3 \\ (r) \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ (r) \end{smallmatrix}$	2	0	0			0	$\sin L$ et $\cos L$	2			0	0	0	
$\xi \alpha$	3		3		0			0	$\sin L$ ou $\cos L$	2		0		0	0	×
$\xi \alpha$	3		3		0			0	$\sin L$ ou $\cos L$	2		0	0		0	×
$\xi \beta$	3		3		0	0	0		$\sin L$ ou $\cos L$	2		0	0	0		×
$\eta \alpha$	3		3	0				0	$\sin L$ ou $\cos L$	2	0			0	0	
$\eta \alpha$	3		3	0				0	$\sin L$ ou $\cos L$	2	0		0		0	
$\eta \beta$	3		3	0		0	0		$\sin L$ ou $\cos L$	2	0		0	0		
$\alpha \alpha$	3		3	0	0			0	$\cos L$	2	0	0			0	
$\alpha \beta$	3	0	3	0	0				$\sin L$	2	0	0		0		×
$\alpha \beta$	3	2	3	0	0				$\sin L$ et $\cos L$	2	0	0	$? \rightarrow 0$			
$\xi \eta \alpha$	3	2	3						$\sin L$ et $\cos L$	2				$? \rightarrow 0$	$? \rightarrow 0$	
$\xi \eta \alpha$	3	2	3						$\sin L$ et $\cos L$	2						
$\xi \eta \beta$	3	2	3						$\sin L$ et $\cos L$	2						×
$\xi \alpha \alpha$	3		3		0			0	$\cos L$	2		0			0	×
$\xi \alpha \beta$	3	0	3						$\sin L$	2		0		0		×
$\xi \alpha \beta$	3	2	3						$\sin L$ et $\cos L$	2						×
$\eta \alpha \alpha$	3		3	0				0	$\cos L$	2	0				0	
$\eta \alpha \beta$	3	0	3						$\sin L$	2	0			0		
$\eta \alpha \beta$	3	2	3						$\sin L$ et $\cos L$	2						
$\alpha \alpha \beta$	3	2	3	0	0				$\sin L$ et $\cos L$	2	0	0				
$\xi \eta \alpha \alpha$	3	2	3						$\sin L$ et $\cos L$	2						
$\xi \eta \alpha \beta$	3	2	3						$\sin L$ et $\cos L$	2						×
$\xi \eta \alpha \beta$	3	2	3						$\sin L$ et $\cos L$	2						
$\xi \alpha \alpha \beta$	3	2	3						$\sin L$ et $\cos L$	2						×
$\eta \alpha \alpha \beta$	3	2	3						$\sin L$ et $\cos L$	2						
$\xi \eta \alpha \alpha \beta$	3	2	3						$\sin L$ et $\cos L$	2						

ANNEXE 8

ÉLÉMENTS DE LA MATRICE $G = \int_{u_0}^{u_f} B du$ (SYSTÈME S_2)

(voir § I, 3.3)

	$e \neq 0$	$e = 0$
$G_{\xi\xi}$	$\left[\frac{u}{2} - \frac{\sin u \cos u}{2} - \frac{e}{3} \sin^3 u \right]_{u_0}^{u_f}$	$\frac{1}{2} \left[L - \sin L \cos L \right]_{L_0}^{L_f}$
$G_{\xi\eta}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left[e \cos u - \frac{1+e^2}{2} \cos^2 u + \frac{e}{3} \cos^3 u \right]_{u_0}^{u_f}$	$\frac{1}{2} \left[\cos^2 L \right]_{L_0}^{L_f}$
$G_{\eta\eta}$	$\frac{1}{1-e^2} \left[\frac{1+4e^2}{2} u - e(3+e^2) \sin u + \frac{1+e^2}{2} \sin u \cos u + \frac{e}{3} \sin^3 u \right]_{u_0}^{u_f}$	$\frac{1}{2} \left[L + \sin L \cos L \right]_{L_0}^{L_f}$
G_{aa}	$4 \left[u + e \sin u \right]_{u_0}^{u_f}$	$4 \left[L \right]_{L_0}^{L_f}$
$G_{a\alpha}$	$4(1-e^2) \left[\sin u \right]_{u_0}^{u_f}$	$4 \left[\sin L \right]_{L_0}^{L_f}$
$G_{a\beta}$	$-4\sqrt{1-e^2} \left[\cos u \right]_{u_0}^{u_f}$	$-4 \left[\cos L \right]_{L_0}^{L_f}$
$G_{a\tau}$	$\left[3u^2 + 6eu \sin u + 16e \cos u - e^2 \sin^2 u \right]_{u_0}^{u_f} \underset{\Delta u \rightarrow \infty}{\sim} 3\Delta u^2$	$\left[3L^2 \right]_{L_0}^{L_f}$
$G_{\alpha\alpha}$	$(1-e^2) \left[\frac{5}{2} u - 4e \sin u + \frac{3}{2} \sin u \cos u + \frac{e}{3} \sin^3 u \right]_{u_0}^{u_f}$	$\frac{1}{2} \left[5L + 3 \sin L \cos L \right]_{L_0}^{L_f}$
$G_{\alpha\beta}$	$\sqrt{1-e^2} \left[e \cos u - \frac{3-e^2}{2} \cos^2 u + \frac{e}{3} \cos^3 u \right]_{u_0}^{u_f}$	$-\frac{3}{2} \left[\cos^2 L \right]_{L_0}^{L_f}$
$G_{\alpha\tau}$	$2(1-e^2) \left[3u \sin u + 4 \cos u - e \sin^2 u \right]_{u_0}^{u_f} \underset{\Delta u \rightarrow \infty}{\sim} \text{ordre } \Delta u$	$\left[6L \sin L + 8 \cos L \right]_{L_0}^{L_f}$
$G_{\beta\beta}$	$\left[\frac{5-4e^2}{2} u - e(1-e^2) \sin u - \frac{3-2e^2}{2} \sin u \cos u - \frac{e}{3} \sin^3 u \right]_{u_0}^{u_f}$	$\frac{1}{2} \left[5L - 3 \sin L \cos L \right]_{L_0}^{L_f}$
$G_{\beta\tau}$	$2\sqrt{1-e^2} \left[-3eu - 3u \cos u + (4+e^2) \sin u + e \sin u \cos u \right]_{u_0}^{u_f} \underset{\Delta u \rightarrow \infty}{\sim} \text{ordre } \Delta u$	$\left[-6L \cos L + 8 \sin L \right]_{L_0}^{L_f}$
$G_{\tau\tau}$	$\left[3u^3 + 9eu^2 \sin u + u(4+48e \cos u + 18e^2 - 3e^2 \sin^2 u) - 60e \sin u - 6e^2 \sin u \cos u + e^3 \left(\frac{\sin^2 u}{3} - 4 \right) \sin u \right]_{u_0}^{u_f} \underset{\Delta u \rightarrow \infty}{\sim} 3\Delta u^2$	$\left[3L^3 + 4L \right]_{L_0}^{L_f}$

ANNEXE 9

DIAGONALISATION DE LA MATRICE G [système (S_2)]

(voir § I, 4.1.2)

Il suffit de considérer le cas plan. Posons alors :

$$(1) \quad \Delta \mathcal{X} = \begin{vmatrix} \Delta a \\ \Delta \alpha \\ \Delta \beta \\ \Delta \tau \end{vmatrix}$$

Nous nous proposons de prendre $\Delta \tau_1$ comme quatrième variation au lieu de $\Delta \tau$ de façon à diagonaliser la matrice G . Si :

$$(2) \quad \Delta \mathcal{X}_1 = \begin{vmatrix} \Delta a \\ \Delta \alpha \\ \Delta \beta \\ \Delta \tau_1 \end{vmatrix}$$

désigne la nouvelle variation de l'état cinématique, cela revient à effectuer la transformation linéaire :

$$(3) \quad \Delta \mathcal{X}_1 = A \Delta \mathcal{X}$$

où A est une matrice de la forme :

$$(4) \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \ell & m & n & k \end{vmatrix}$$

La consommation ΔJ étant un invariant, A doit être telle que :

$$(5) \quad \Delta \mathcal{X}_1^T G_1^{-1} \Delta \mathcal{X}_1 = \Delta \mathcal{X}^T G^{-1} \Delta \mathcal{X}$$

quel que soit $\Delta \mathcal{X}$. On tire de cette identité :

$$(6) \quad G_1 = A G A^T =$$

G_{aa}	0	0	$\ell G_{aa} + k G_{a\tau}$
0	$G_{\alpha\alpha}$	0	$m G_{\alpha\alpha} + k G_{\alpha\tau}$
0	0	$G_{\beta\beta}$	$n G_{\beta\beta} + k G_{\beta\tau}$
$\ell G_{aa} + k G_{a\tau}$	$m G_{\alpha\alpha} + k G_{\alpha\tau}$	$n G_{\beta\beta} + k G_{\beta\tau}$	$\ell(\ell G_{aa} + k G_{a\tau})$ $+ m(m G_{\alpha\alpha} + k G_{\alpha\tau})$ $+ n(n G_{\beta\beta} + k G_{\beta\tau})$ $+ k(\ell G_{a\tau} + m G_{\alpha\tau}$ $+ n G_{\beta\tau} + k G_{\tau\tau})$

Cette matrice peut être diagonalisée en choisissant A de façon que :

$$(7) \quad \ell = -k \frac{G_{\alpha\tau}}{G_{\alpha\alpha}}$$

$$(8) \quad m = -k \frac{G_{\beta\tau}}{G_{\beta\beta}}$$

$$(9) \quad n = -k \frac{G_{\tau\tau}}{G_{\tau\tau}}.$$

Alors :

$$(10) \quad G_{\tau\tau} = k^2 \left(G_{\tau\tau} - \frac{G_{\alpha\tau}^2}{G_{\alpha\alpha}} - \frac{G_{\beta\tau}^2}{G_{\beta\beta}} \right).$$

Il subsiste donc un degré de liberté dans le choix de A (paramètre k). Le changement de variable s'écrit :

$$(11) \quad \Delta\tau = k (\Delta\tau - \Delta\tau_{t.s.})$$

où :

$$(12) \quad \Delta\tau_{t.s.} = \frac{G_{\alpha\tau}}{G_{\alpha\alpha}} \Delta\alpha + \frac{G_{\beta\tau}}{G_{\beta\beta}} \Delta\beta$$

n'est autre que la variation de τ dans le transfert simple (réalisé de façon optimale) correspondant au rendez-vous considéré, induite par les variations de α , β et τ . En effet, dans le cas du transfert simple, posons :

$$(13) \quad \Delta\theta = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{fixé puisque } \Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\tau \text{ sont donnés})$$

L'adjoint relatif au transfert simple est, d'autre part :

$$(14) \quad P_{t.s.} = [P_{\alpha,t.s.}, P_{\beta,t.s.}, P_{\tau,t.s.}, 0]$$

L'équation (I,3 - 66) s'écrit alors :

$$(15) \quad \Delta\mathcal{X}_{t.s.} = \Delta\theta + Q \Delta\tau_{t.s.} = G P_{t.s.}^T$$

où Q est la matrice :

$$(16) \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dans le transfert simple, $\Delta \tau_{t.s.}$ et $P_{t.s.}$ doivent être considérés comme des inconnues à calculer en fonction du transfert $\Delta \theta$.

Ces quantités sont données par l'équation matricielle :

$$(17) \quad G P_{t.s.}^T - Q \Delta \tau_{t.s.} = S [P_{t.s.}^T + Q \Delta \tau_{t.s.}] = \Delta \theta$$

où S est la matrice :

$$(18) \quad S = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline G_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & G_{\alpha\alpha} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & G_{\beta\beta} & 0 \\ \hline G_{a\tau} & G_{\alpha\tau} & G_{\beta\tau} & -1 \\ \hline \end{array}$$

D'où :

$$(19) \quad \Delta \tau_{t.s.} = Q^T S^{-1} \Delta \theta$$

avec

$$(20) \quad S^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{1}{G_{aa}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{G_{\alpha\alpha}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{G_{\beta\beta}} & 0 \\ \hline \frac{G_{a\tau}}{G_{aa}} & \frac{G_{\alpha\tau}}{G_{\alpha\alpha}} & \frac{G_{\beta\tau}}{G_{\beta\beta}} & -1 \\ \hline \end{array}$$

$\Delta \tau_{t.s.}$ est bien donné par l'expression (12).

Si k est pris égal à l'unité, $\Delta \tau_1$ représente donc le *supplément* nécessaire pour assurer le rendez-vous.

Le terme supplémentaire ΔJ_1 s'introduisant dans ΔJ est égal à :

$$(21) \quad \Delta J_1 = \frac{\Delta \tau_1^2}{2 G_{1\tau\tau}} .$$

Dans le cas d'un grand nombre de tours ($N \gg 1$), $G_{\tau\tau} \sim 3 \Delta u^3$, $G_{a\tau} \sim -3 \Delta u^2$, $G_{\alpha\tau}$ et $G_{\beta\tau}$ = ordre Δu donc $G_1 \sim \frac{3}{4} \Delta u^3$ et :

$$(22) \quad \Delta J_1 = \frac{2 \Delta \tau_1^2}{3 \Delta u^3} .$$



ANNEXE 10

ROTATION INFINITÉSIMALE DU PLAN DE L'ORBITE SYSTÈME S_{1C} ($W = C^{te}$, $F \leq F_{max}$, POUSSEE CONTINUE) (voir § II, 2.3.2.2)

$$e = 0 \quad \alpha = \delta \quad |\lambda| = |\nu| = \frac{2}{\pi} = 0,637$$

$e = 0,1$

α°	δ°	$ \lambda = \nu $
0	0	0.650
10	9° 40'	0.649
20	19° 22'	0.648
30	29° 09'	0.646
40	39° 01'	0.645
50	19° 01'	0.642
60	59° 08'	0.640
70	69° 21'	0.639
80	79° 39'	0.637
90	90°	0.637

$e = 0,2$

α°	δ°	$ \lambda = \nu $
0	0	0.690
10	8° 43'	0.688
20	17° 35'	0.682
30	26° 42'	0.676
40	36° 11'	0.669
50	46° 07'	0.660
60	56° 32'	0.651
70	67° 24'	0.643
80	78° 36'	0.640
90	90°	0.637

$e = 0,3$

α°	δ°	$ \lambda = \nu $
0	0	0.756
10	7° 24'	0.755
20	14° 56'	0.746
30	23° 01'	0.735
40	31° 49'	0.716
50	41° 31'	0.695
60	52° 16'	0.674
70	64° 05'	0.655
80	76° 47'	0.642
90	90°	0.637

$e = 0,4$

α°	δ°	$ \lambda = \nu $
0	0	0.860
10	5° 45'	0.855
20	11° 51'	0.845
30	18° 38'	0.825
40	26° 25'	0.794
50	35° 36'	0.756
60	46° 29'	0.715
70	59° 21'	0.676
80	74° 04'	0.648
90	90°	0.637

$e = 0,5$

α°	δ°	$ \lambda = \nu $
0	0	1.005
10	4° 10'	1.00
20	8° 45'	0.985
30	14° 05'	0.959
40	20° 39'	0.915
50	28° 55'	0.856
60	39° 32'	0.786
70	53° 12'	0.715
80	70° 18'	0.660
90	90°	0.637

$e = 0,6$

α°	δ°	$ \lambda = \nu $
0	0	1.212
10	2° 45'	1.205
20	5° 55'	1.19
30	9° 53'	1.155
40	15° 07'	1.10
50	22° 10'	1.017
60	31° 55'	0.905
70	45° 43'	0.784
80	65° 12'	0.680
90	90°	0.637

$e = 0,7$

α°	δ°	$ \lambda = \nu $
0	0	1.520
10	1° 35'	1.515
20	3° 34'	1.498
30	6° 18'	1.460
40	10° 14'	1.389
50	15° 53'	1.270
60	24° 13'	1.105
70	37° 08'	0.908
80	58° 19'	0.721
90	90°	0.637

$e = 0,8$

α°	δ°	$ \lambda = \nu $
0	0	2.02
10	0° 44'	2.02
20	1° 47'	2.005
30	3° 30'	1.96
40	6° 12'	1.86
50	10° 23'	1.701
60	16° 53'	1.461
70	27° 46'	1.142
80	48° 53'	0.810
90	90°	0.637

$e = 0,9$

α°	δ°	$ \lambda = \nu $
0	0	3.10
10	0° 12'	3.10
20	0° 37'	3.09
30	1° 28'	3.04
40	3° 24'	2.91
50	5° 41'	2.68
60	9° 58'	2.26
70	17° 35'	1.701
80	35° 08'	1.05
90	90°	0.637

ANNEXE 11

ROTATION OPTIMALE DU PLAN D'UNE ORBITE DE FAIBLE EXCENTRICITÉ

(voir § II, 2.3.2.2)

1. ZONE 2 - DEUX ZONES DE POUSSÉE.

$$(1) \quad 0 \ll s \ll 1 - e \cos \alpha.$$

Prenant e comme infiniment petit principal et remarquant que $s \not\ll 1$ (sauf si $\alpha = \frac{\pi}{2}$), il vient :

$$(2) \quad \sin \beta' = (1 - \cos^2 \beta')^{1/2} = [1 - (e \cos \alpha + s)^2]^{1/2} = \\ \sqrt{1 - s^2} - \frac{e s \cos \alpha}{\sqrt{1 - s^2}} - \frac{e^2 \cos^2 \alpha}{2(1 - s^2)\sqrt{1 - s^2}} + \text{ordre } e^3$$

$$(3) \quad \sin \beta'' = (1 - \cos^2 \beta'')^{1/2} = [1 - (e \cos \alpha - s)^2]^{1/2} = \\ \sqrt{1 - s^2} + \frac{e s \cos \alpha}{\sqrt{1 - s^2}} - \frac{e^2 \cos^2 \alpha}{2(1 - s^2)\sqrt{1 - s^2}} + \text{ordre } e^3$$

$$(4) \quad \sin \beta' + \sin \beta'' = 2\sqrt{1 - s^2} - \frac{e^2 \cos^2 \alpha}{2(1 - s^2)\sqrt{1 - s^2}} + \text{ordre } e^4$$

$$(5) \quad \sin \beta' - \sin \beta'' = -\frac{2 e s \cos \alpha}{\sqrt{1 - s^2}} + \text{ordre } e^3$$

et, par la formule de Taylor :

$$(6) \quad \beta' = \text{Arc sin} \left(\sqrt{1 - s^2} - \frac{e s \cos \alpha}{\sqrt{1 - s^2}} - \frac{e^2 \cos^2 \alpha}{2(1 - s^2)\sqrt{1 - s^2}} + \text{ordre } e^3 \right) = \\ \text{Arc cos } s - \frac{e \cos \alpha}{\sqrt{1 - s^2}} - \frac{e^2 s \cos^2 \alpha}{2(1 - s^2)\sqrt{1 - s^2}} + \text{ordre } e^3$$

et en changeant S en $-S$:

$$(7) \quad \beta'' = \pi - \text{Arc cos } S - \frac{e \cos \alpha}{\sqrt{1-S^2}} + \frac{e^2 S \cos^2 \alpha}{2(1-S^2)\sqrt{1-S^2}} + \text{ordre } e^3$$

d'où :

$$(8) \quad \beta' + \beta'' - \pi = -\frac{2e \cos \alpha}{\sqrt{1-S^2}} + \text{ordre } e^3$$

$$(9) \quad \beta' + \pi - \beta'' = 2 \text{Arc cos } S - \frac{e^2 S \cos^2 \alpha}{(1-S^2)\sqrt{1-S^2}} + \text{ordre } e^4.$$

D'autre part :

$$(10) \quad \sin 2\beta' + \sin 2\beta'' = 4e \cos \alpha \frac{1-2S^2}{\sqrt{1-S^2}} + \text{ordre } e^3.$$

Portant toutes ces valeurs dans (II,2. 24-26), il vient :

$$(11) \quad \lambda_\eta = \frac{\Delta \eta}{2N\pi F_{\max}} = \frac{-1}{2\pi \sqrt{1-S^2}} \left[4\sqrt{1-S^2} \cos \alpha + \frac{2e^2}{\sqrt{1-S^2}} \cos \alpha \left(6 - 4S^2 - \cos^2 \alpha \frac{3-6S^2+4S^4}{1-S^2} \right) + \text{ordre } e^3 \right]$$

$$(12) \quad \lambda_\xi = \frac{\Delta \xi}{2N\pi F_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \left[4\sqrt{1-S^2} \sin \alpha - \frac{2e^2}{\sqrt{1-S^2}} \sin \alpha \cos^2 \alpha \frac{3-6S^2+4S^4}{1-S^2} + \text{ordre } e^3 \right]$$

$$(13) \quad \lambda_c = \frac{W|\Delta m|}{2N\pi F_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \left[4 \text{Arc cos } S + \frac{2S(1-2S^2)}{(1-S^2)\sqrt{1-S^2}} e^2 \cos^2 \alpha + \text{ordre } e^3 \right]$$

$$(14) \quad \lambda = \frac{|\Delta j|}{2N\pi F_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \left[4\sqrt{1-S^2} + 2 \frac{4-6S^2+S^4}{(1-S^2)\sqrt{1-S^2}} e^2 \cos^2 \alpha + \text{ordre } e^3 \right]$$

Dans (13) et (14), α peut être remplacé par sa valeur pour $e = 0$, c'est-à-dire par δ . On peut alors tirer S de (14) :

$$(15) \quad S = \sqrt{1-Z^2} \left(1 + \frac{Z^4 + 4Z^2 - 1}{2Z^2(1-Z^2)} e^2 \cos^2 \delta + \text{ordre } e^3 \right)$$

avec

$$(16) \quad z = \frac{\pi}{2} \lambda$$

et portant cette valeur dans (13) il vient :

$$(17) \quad \lambda_c = \frac{1}{2\pi} \left[4 \operatorname{Arc} \sin z - \frac{2(1+3z^2)}{z \sqrt{1-z^2}} e^2 \cos^2 \delta + \text{ordre } e^3 \right]$$

d'où la rotation spécifique :

$$(18) \quad \gamma = \frac{|\Delta j|}{W |\Delta m|} = \frac{z}{\operatorname{Arc} \sin z} + \frac{1+3z^2}{4(\operatorname{Arc} \sin z)^2 \sqrt{1-z^2}} e^2 \cos^2 \delta + \text{ordre } e^4.$$

Cette formule donne *directement* la rotation spécifique en fonction de la rotation à effectuer, du nombre de tours permis et de la poussée maximale avec une assez bonne précision lorsque l'excentricité est faible.

La condition (1) s'écrit encore :

$$(19) \quad s \leq 1 - e \cos \delta + \text{ordre } e^2.$$

Nous démontrerons qu'alors :

$$(20) \quad z \geq \sqrt{e \cos \delta} + \text{ordre } e^{3/2}.$$

Lorsqu'on approche de la frontière (P'), z diminue et devient de l'ordre de $e^{1/2}$. La formule (18) montre alors que le second terme du développement est de l'ordre de e^2/z^2 c'est-à-dire de l'ordre e et non pas de l'ordre de e^2 .

L'erreur est alors de l'ordre de e^2 et non de e^4 .

Si bien que, au-delà de (P'), il suffira de développer jusqu'aux termes en e (erreur de l'ordre de e^2) sans que la précision soit moindre que celle obtenue par (18) au voisinage de (P').

2. UNE SEULE ZONE DE POUSSÉE.

Pour qu'il n'y ait qu'une zone de poussée, il faut et il suffit que :

$$(21) \quad \begin{cases} 1 - e \cos \alpha < s \leq 1 + e \cos \alpha \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Posons alors :

$$(22) \quad s = 1 + k e \cos \alpha$$

avec :

$$(23) \quad -1 < k \leq 1$$

k remplace le paramètre s .

Il vient alors :

$$(24) \quad \cos \beta'' = e \cos \alpha - s = -1 + (1-k) e \cos \alpha$$

$$(25) \quad \sin \beta'' = \left[2(1-k) \cos \alpha \right]^{1/2} e^{1/2} - \frac{1}{8} \left[2(1-k) \cos \alpha \right]^{3/2} e^{3/2} + \text{ordre } e^{5/2}$$

$$(26) \quad \pi - \beta'' = \left[2(1-k) \cos \alpha \right]^{1/2} e^{1/2} + \frac{1}{24} \left[2(1-k) \cos \alpha \right]^{3/2} e^{3/2} + \text{ordre } e^{5/2}$$

$$(27) \quad \sin 2\beta'' = -2 \left[2(1-k) \cos \alpha \right]^{1/2} e^{1/2} + \text{ordre } e^{3/2}$$

$$(28) \quad \lambda_\eta = \frac{\Delta \eta}{2N\pi F_{\max}} = \frac{-1}{2\pi \sqrt{1-e^2}} \left\{ 2 \cos \alpha \left[2(1-k) \cos \alpha \right]^{1/2} e^{1/2} + \right. \\ \left. 2 \left[2(1-k) \cos \alpha \right]^{1/2} \left(\frac{3+k}{4} \cos^2 \alpha + 1 \right) e^{3/2} + \text{ordre } e^{5/2} \right\}$$

$$(29) \quad \lambda_\xi = \frac{\Delta \xi}{2N\pi F_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2 \sin \alpha \left[2(1-k) \cos \alpha \right]^{1/2} e^{1/2} + \right. \\ \left. 2 \left[2(1-k) \cos \alpha \right]^{1/2} \frac{3+k}{4} \sin \alpha \cos \alpha e^{3/2} + \text{ordre } e^{5/2} \right\}$$

$$(30) \quad \lambda = \frac{|\Delta j|}{2N\pi F_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2 \left[2(1-k) \cos \alpha \right]^{1/2} \right. \\ \left. \left(e^{1/2} + \frac{7+k}{4} \cos \alpha e^{3/2} + \text{ordre } e^{5/2} \right) \right\}$$

$$(31) \quad \lambda_c = \frac{W|\Delta m|}{2N\pi F_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2 \left[2(1-k) \cos \alpha \right]^{1/2} e^{1/2} + \right. \\ \left. \frac{13-k}{6} \cos \alpha \left[2(1-k) \cos \alpha \right]^{1/2} e^{3/2} + \text{ordre } e^{5/2} \right\}$$

$$(32) \quad \nu = \frac{|\Delta j|}{W|\Delta m|} = \frac{\lambda}{\lambda_c} = 1 + \frac{k+2}{3} e \cos \alpha + \text{ordre } e^2$$

$$(33) \quad \cos \delta = \cos \alpha + e \sin^2 \alpha + \text{ordre } e^2.$$

Dans le second terme de (32), il suffit de porter les valeurs α et k tirées de (30) et (33) où on ne conserve que le premier terme du développement :

$$(34) \quad \alpha = \delta$$

$$(35) \quad k = 1 - \frac{\pi^2 \lambda^2}{2e \cos \delta}$$

d'où :

$$(36) \quad \nu = 1 + e \cos \delta - \frac{\pi^2 \lambda^2}{6} + \text{ordre } e^2.$$

Formule à comparer avec (18).

Les points de la frontière (Γ') correspondent à $k = -1$ soit, par (35) :

$$(37) \quad z = \frac{\pi \lambda}{2} = \sqrt{e \cos \delta} + \text{ordre } e^{3/2}.$$

Portant dans (18) et (36), on obtient le même développement :

$$(38) \quad \nu(\Gamma') = 1 + \frac{e \cos \delta}{3} + \text{ordre } e^2.$$

Dans le cas particulier du cercle, l'expression de la rotation spécifique est très simple :

$$(39) \quad \nu = \frac{|\Delta j|}{W|\Delta m|} = \frac{\frac{\pi}{2} \lambda}{\text{Arc sin}\left(\frac{\pi}{2} \lambda\right)} \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{|\Delta j|}{2 N \pi F_{\max}}.$$



ANNEXE 12

TRANSFERT ENTRE CERCLES - SYSTÈME (S_1)

(voir § II, 3.3.2)

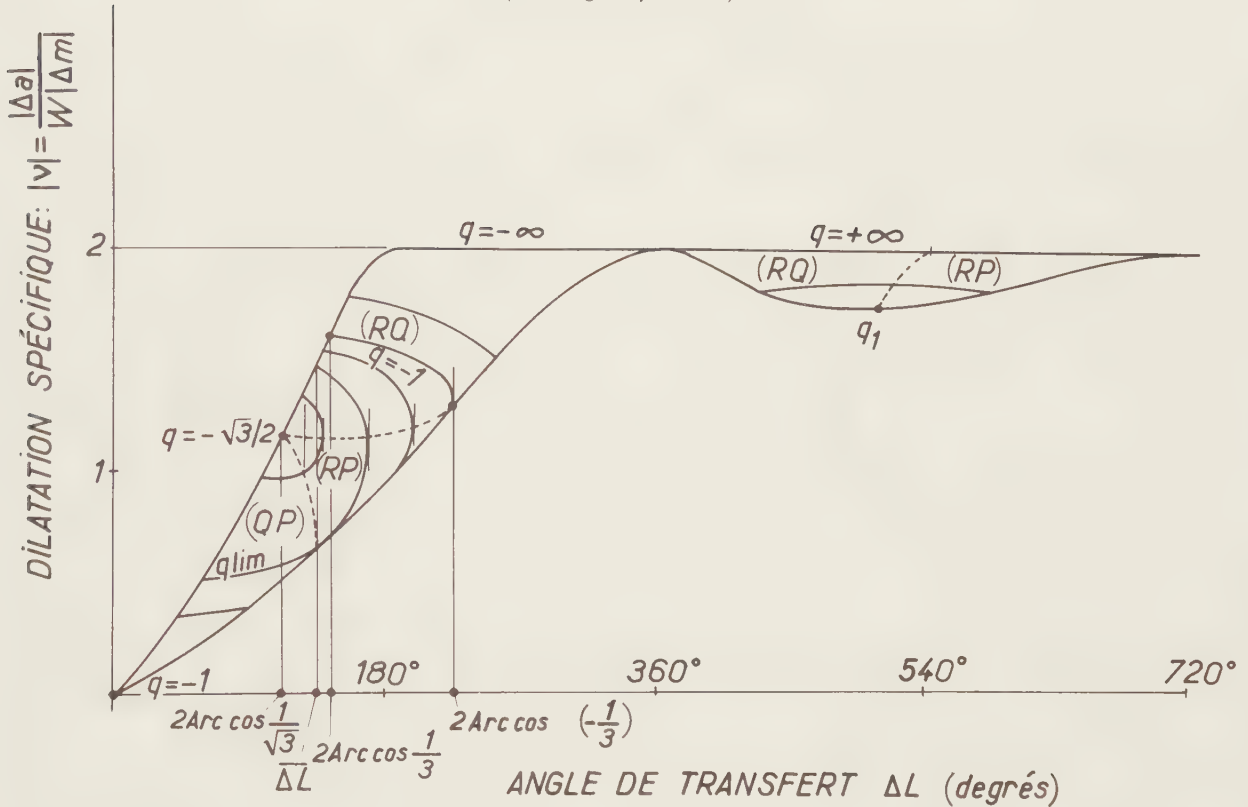


Fig. 1 - Lignes iso- q (qualitatif) (système S_1).

1. $0 \leq \Delta L \leq 2\pi$

SOLUTIONS CORRESPONDANT A UNE VALEUR PARTICULIÈRE DE q (fig. 1).

Pour une valeur de $-\sqrt{3}/2 \leq q \leq 0$, il n'y a pas de solution car (II,3 - 41) ne peut pas être satisfait.

Pour $q = -\sqrt{3}/2$ (fig. 2a), il n'y a qu'une solution bi-impulsionnelle correspondant au point $x_0 = x_1 = 1/\sqrt{3}$ c'est-à-dire à l'angle de transfert $\Delta L = 2 \text{Arc cos } \frac{1}{\sqrt{3}} = 109^\circ 28'$.

Pour $q_{lim} < q < -\sqrt{3}/2$ (fig. 2b), il y a une infinité de solutions correspondant à des valeurs différentes de l'angle de transfert et du rapport $|\lambda_1| = |\Delta a|/F_{max}$. On peut suivre ces solutions par continuité, lorsque l'angle de transfert varie, depuis la solution bi-impulsionnelle (QP) en passant

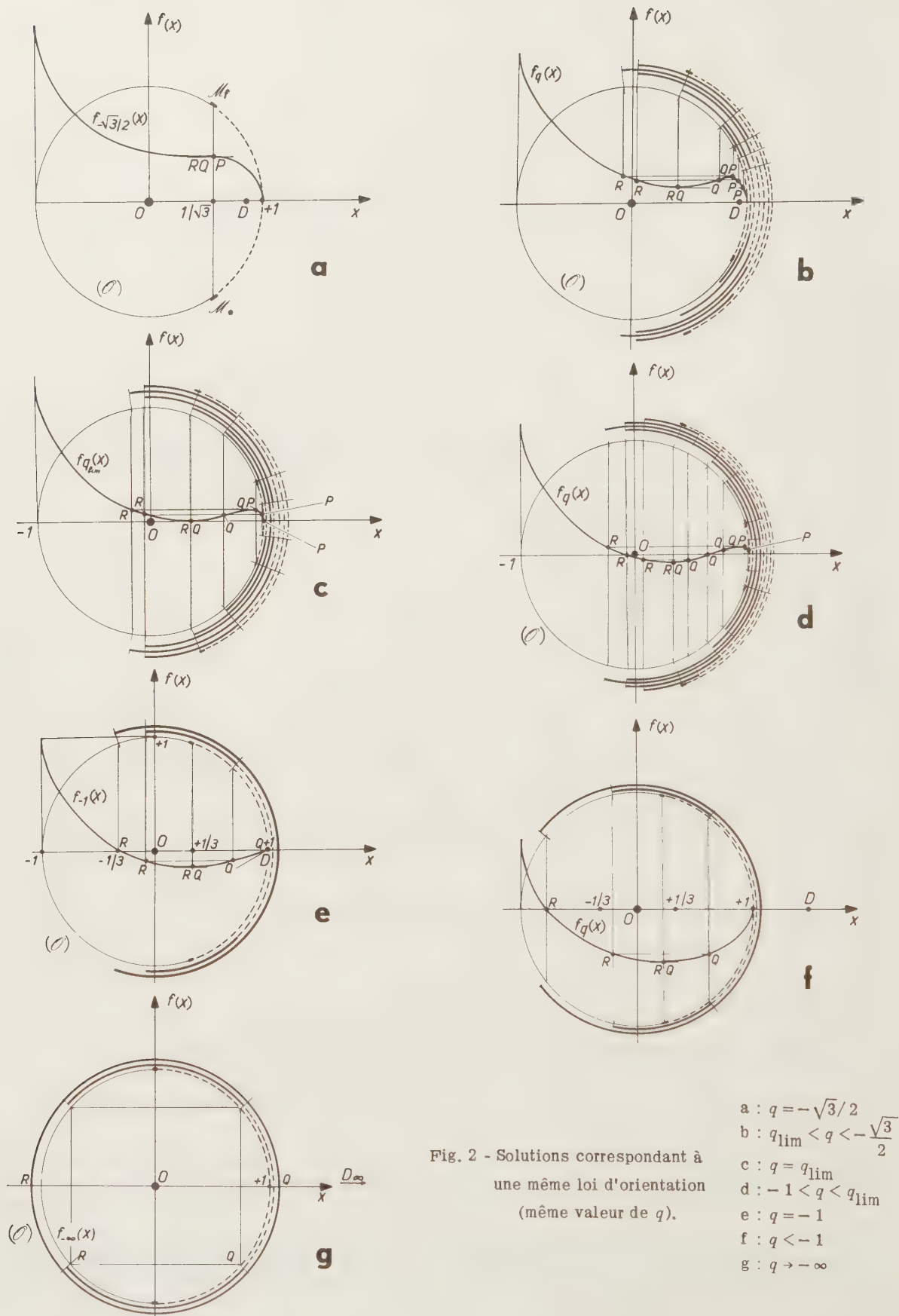


Fig. 2 - Solutions correspondant à une même loi d'orientation (même valeur de q).

- a : $q = -\sqrt{3}/2$
- b : $q_{\text{lim}} < q < -\sqrt{3}/2$
- c : $q = q_{\text{lim}}$
- d : $-1 < q < q_{\text{lim}}$
- e : $q = -1$
- f : $q < -1$
- g : $q \rightarrow -\infty$

par toute une gamme de solutions à deux arcs de poussée. On remarquera que parmi ces solutions ne figure aucune solution où la poussée est appliquée constamment.

Pour $q = q_{lim}$ (fig. 2 c), apparaît une solution où la poussée est appliquée constamment que nous appellerons solution "poussée continue".

Pour $-1 < q < q_{lim}$ (fig. 2 d), il y a deux solutions "poussée continue".

Pour $q = -1$ (fig. 2 e), la solution bi-impulsionnelle est unique et correspond à $x = 1/3$ soit

$$\Delta L = 2 \operatorname{Arc} \cos \frac{1}{3} = 141^{\circ} 04'.$$

La solution "poussée continue" est unique et correspond à $x_0 = -1/3$ soit

$$\Delta L = 2 \operatorname{Arc} \cos (-1/3) = 218^{\circ} 56'.$$

Pour $q < -1$ (fig. 2 f), la solution bi-impulsionnelle et la solution "poussée continue" sont uniques.

Lorsque $q \rightarrow -\infty$ (fig. 2 g), on obtient, par continuité, une solution bi-impulsionnelle de HOHMANN ($\Delta L = 180^{\circ}$), des solutions de "type HOHMANN" comprenant deux arcs de poussée symétriques par rapport à 0 et finalement une solution "poussée continue" correspondant à une révolution ($\Delta L = 360^{\circ}$).

Nous avons vu, qu'en fait, pour $\rho_e = 0$, $\rho_a = -1/2$ donc $q = -\infty$, la solution est singulière et ne peut pas être obtenue par la méthode précédente. Les solutions obtenues plus haut font partie d'une famille plus vaste de solutions.

SOLUTIONS CORRESPONDANT A UNE VALEUR PARTICULIÈRE DE ΔL .

Les résultats précédents peuvent être présentés d'une manière différente, plus conforme à la pratique où l'angle de transfert est fixé.

Soit à réaliser un transfert d'angle de transfert ΔL donnée ($0 \leq \Delta L \leq 2\pi$). L'abscisse x_0 de la figure II,3 - 12 est fixée.

Il y a, en général, une infinité de solutions, correspondant à des valeurs différentes de q (donc de x_1) et du rapport $|\lambda_1| = |\Delta a| / F_{max}$. Désignons par ΔL l'angle de transfert correspondant à l'intersection du lieu (L) des maxima et minima de $f(x)$ avec $\partial \bar{x}$ (fig. II,3 - 11).

Si $0 \leq \Delta L \leq 2 \operatorname{Arc} \cos \frac{1}{\sqrt{3}} = 109^{\circ} 28'$ (fig. 3 a), et lorsque q décroît, on passe successivement

de la solution bi-impulsionnelle (QP) ($q = q_1 < -\sqrt{3}/2$) à des solutions à deux arcs de poussée (QP) ($q = q_2$; $q_3 < q_2 < q_1$) puis à la solution " (QP) ($q = q_3$; $-1 < q_3 < q_{lim}$).

Si $2 \operatorname{Arc} \cos \frac{1}{\sqrt{3}} < \Delta L < \overline{\Delta L}$ (fig. 3 b).

Partant de la solution bi-impulsionnelle (RQ) ($q = q_1$) on rencontre, des solutions à deux arcs de poussée de type (RQ) ($q = q_2$; $q_1 < q_2 < q_3$), puis de type (RP) ($q = q_4$; $q_1 < q_4 < q_3$) enfin de type (QP) ($q = q_5$; $q_6 < q_5 < q_1$). La solution "poussée continue" (QP) est obtenue pour $q = q_6$.

Si $\overline{\Delta L} < \Delta L < \pi$ (fig. 3 c).

Partant de la solution bi-impulsionnelle (RQ) ($q = q_1$) on rencontre des solutions à deux arcs de poussée de type (RQ) ($q = q_2$; $q_1 < q_2 < q_3$) puis de type (RP) ($q = q_4$; $q_3 < q_4 < q_5$), enfin, la solution "poussée continue" (RP) ($q = q_5$). Ce cas ne diffère pas essentiellement du cas précédent, si ce n'est par le fait qu'on ne rencontre pas de solution de type (QP).

Si $\pi < \Delta L < \operatorname{Arc} \cos (-1/3)$ (fig. 3 d).

Pour $q \rightarrow -\infty$, on trouve la solution "type HOHMANN" (RQ). Mais ce n'est qu'une solution parmi

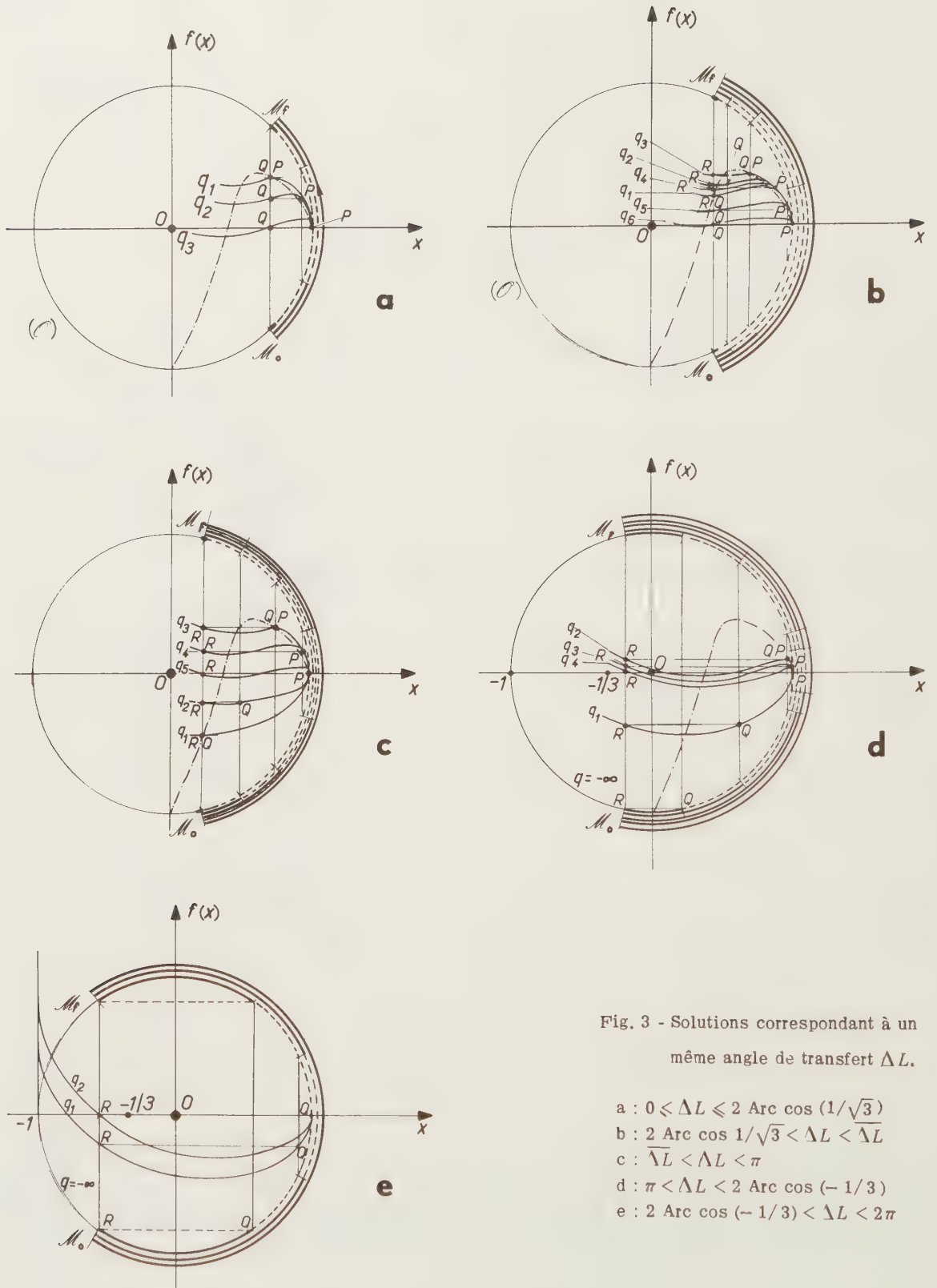


Fig. 3 - Solutions correspondant à un même angle de transfert ΔL .

- a : $0 \leq \Delta L \leq 2 \text{ Arc cos } (1/\sqrt{3})$
- b : $2 \text{ Arc cos } 1/\sqrt{3} < \Delta L < \bar{\Delta L}$
- c : $\bar{\Delta L} < \Delta L < \pi$
- d : $\pi < \Delta L < 2 \text{ Arc cos } (-1/3)$
- e : $2 \text{ Arc cos } (-1/3) < \Delta L < 2\pi$

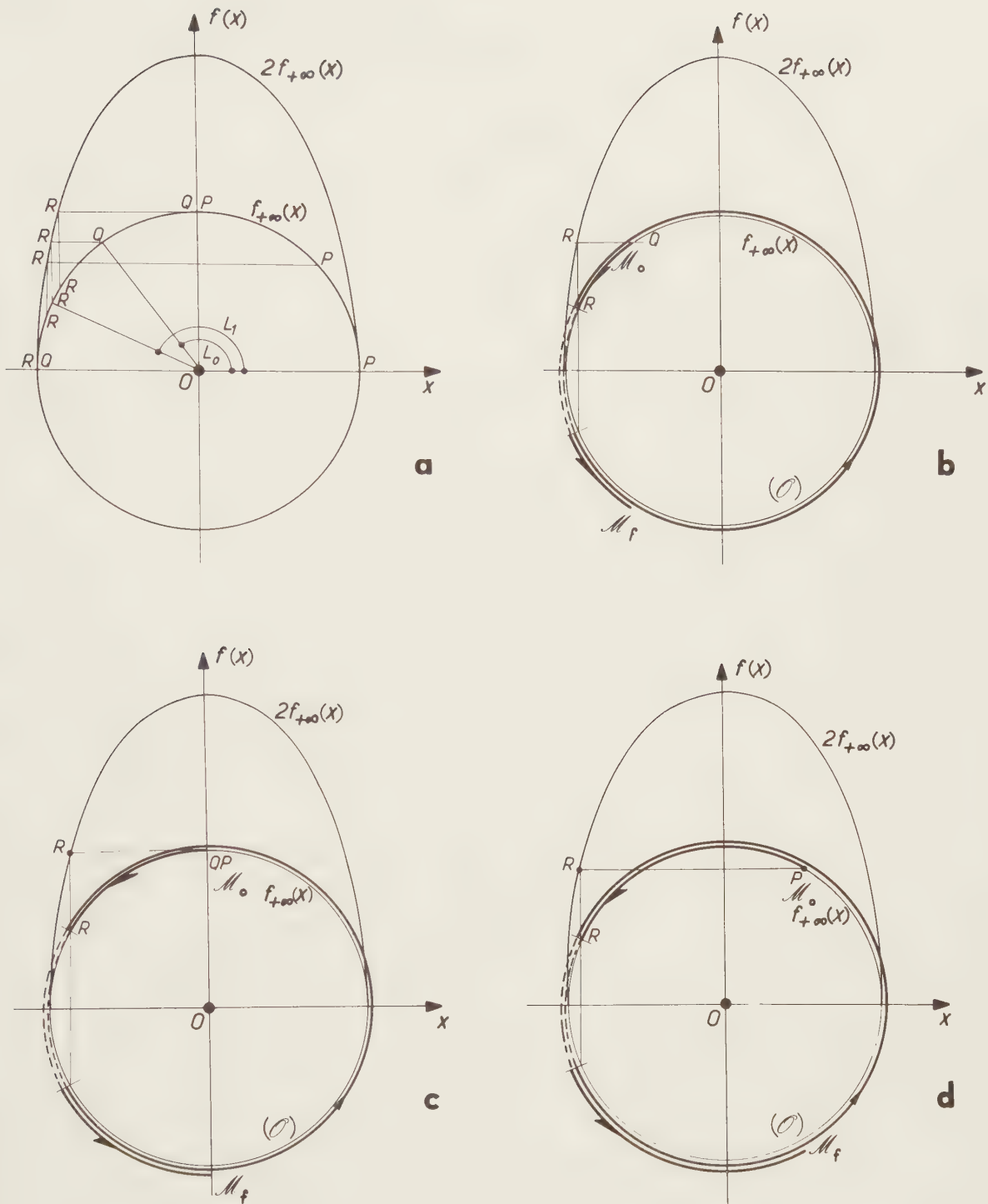


Fig. 4 - $2\pi \leq \Delta L \leq 4\pi$. Solutions correspondant à une poussée tangentielle ($q \rightarrow +\infty$)

- a : Types de solutions
- b : Solutions RQ
- c : Solutions R(QP)
- d : Solutions RP.

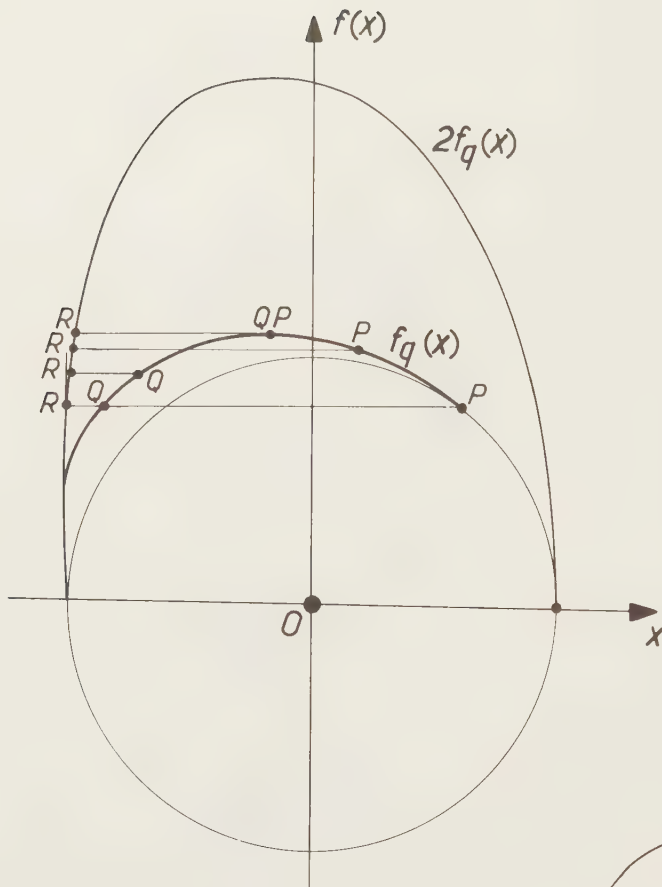


Fig. 5 - $2\pi \leq \Delta L \leq 4\pi$, ($q > q_1$)

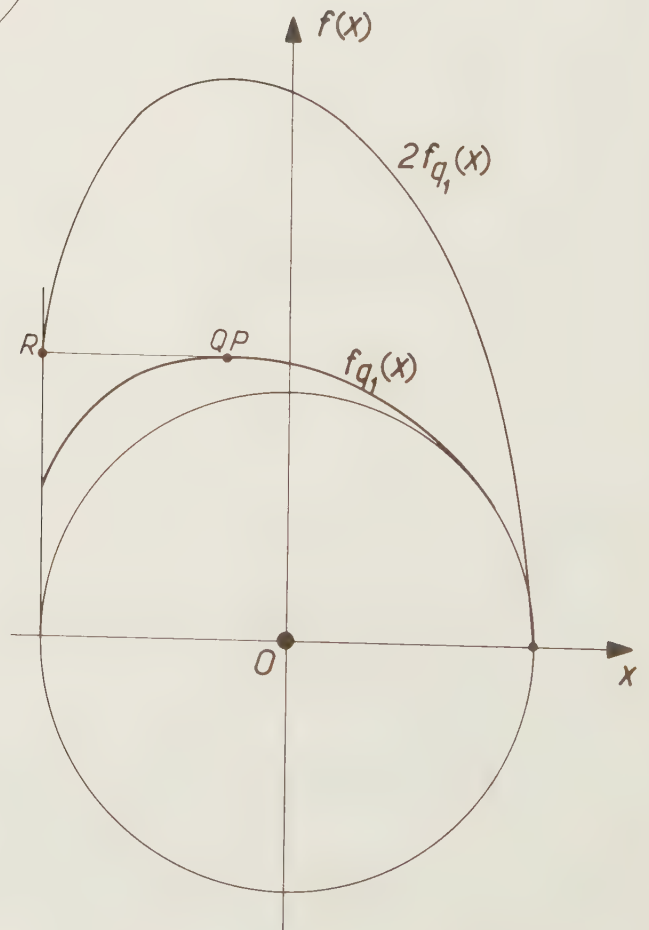


Fig. 6 - $2\pi \leq \Delta L \leq 4\pi$, ($q = q_1$)

toutes les solutions possibles (dégénérescence).

Puis apparaissent des solutions à deux arcs de poussée de type (RQ) pour $q = q_1$ ($-\infty < q_1 < q_2$), puis de type (RP) pour $q = q_3$ ($q_4 < q_3 < q_2$) enfin, la solution "poussée continue" (RP) pour $q = q_4$.

Si $2 \text{ Arc cos } (-1/3) < \Delta L < 2\pi$ (fig. 3 e).

Seules les solutions de type (RQ) sont présentes pour $-\infty < q_1 < q_2 < -1$.

2. $\boxed{2\pi \leq \Delta L \leq 4\pi}$

SOLUTIONS CORRESPONDANT A UNE VALEUR PARTICULIÈRE DE q et à des valeurs différentes de l'angle de transfert ΔL et du rapport $|\lambda_1| = |\Delta a|/F_{max}$.

Commençons par le cas $q \rightarrow +\infty$. Nous obtiendrons des solutions figurant parmi l'ensemble des solutions singulières relatives au problème dégénéré (fig. 4 a). La courbe $2f_{+\infty}(x)$ est un arc d'ellipse transformé par affinité de l'arc de cercle $f_{+\infty}(x)$.

Les angles L_0 et L_1 sont liés par :

(1) $\sin L_0 = 2 \sin L_1$.

Les solutions, du type (RQ) (fig. 4 b), $[R(QP)]$ (fig. 4 c) puis (RP) (fig. 4 d), s'échelonnent depuis la solution "poussée continue" sur une révolution $RQ = 0$ ($\Delta L = 2\pi$) jusqu'à la solution "poussée continue" sur deux révolutions (RP) ($\Delta L = 4\pi$).

Pour $q > q_1$ (fig. 5), les solutions sont également du type (RQ) et (RP) avec deux solutions "poussée continue".

Pour $q = q_1$ (fig. 6), il y a une seule solution $[R(QP)]$ correspondant à la "poussée continue".

3. POUR $\boxed{2N\pi \leq \Delta L \leq 2(N+1)\pi}$,

q est ≥ 0 selon que N est $\begin{cases} \text{impair} \\ \text{pair} \end{cases}$ et il y a $N+2$ arcs de poussée.

Pour $q = \pm \infty$, la condition généralisant (1) est :

$$\sin L_0 = (N+1) \sin L_1.$$



ANNEXE 13

TRANSFERTS IMPULSIONNELS OPTIMAUX ENTRE ORBITES QUASI-CIRCULAIRES PROCHES, COPLANAIRES OU NON

(voir chapitre II, 5)

1. TYPE I (Bi-impulsionnel).

Prenons l'axe de référence $\vec{Ox}$ selon $\vec{p}_e$. Les impulsions $I'\Delta C$ et $I''\Delta C$ ($I' + I'' = 1$) appliquées aux points $M'(L')$ et $M''(L'' = -L')$ provoquent les variations :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \xi = Z' \sin L' \Delta C \\ \Delta \eta = -Z' \cos L' (I' - I'') \Delta C \\ \Delta \vartheta = 2Y' \Delta C \\ \Delta \alpha = (X' \sin L' + 2Y' \cos L') \Delta C \\ \Delta \beta = (-X' \cos L' + 2Y' \sin L') (I' - I'') \Delta C \end{array} \right.$$

Nous supposons $\sin L' > 0$ pour l'impulsion $I' \Delta C$

De ces équations, on déduit aisément les relations (II, 5. 5-9).

La loi de poussée optimale est donc exprimée en fonction des paramètres de transfert ($\vec{\Delta j}$, $\Delta e_{//}$, $\Delta e_{\perp}$, $\Delta \vartheta$) et de δ et ΔC , qui sont pour l'instant inconnus. Pour déterminer ces deux inconnues, nous disposerons de deux relations :

La première exprime que X' , Y' , Z' sont des cosinus directeurs :

$$(2) \quad X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 1.$$

La seconde, lie X' , Y' , Z' et la position L' .

$$(3) \quad \operatorname{tg} L' = \frac{1 - Y'^2}{2X'Y'} = \frac{X'^2 + Z'^2}{2X'Y'}.$$

Cette dernière relation s'obtient géométriquement de la façon suivante (fig. 1).

Soit $\mathcal{P}(X, Y, Z)$ l'un des points de contact de l'ellipse ($\mathcal{P}$) et de la sphère (Σ). La tangente $\vec{TP}$ en $\mathcal{P}$ à ($\mathcal{P}$) est l'intersection du plan (π) de ($\mathcal{P}$), défini par le point $\mathcal{P}$ et l'axe $\vec{MY}$, et du plan tangent en $\mathcal{P}$ à (Σ), défini par $\mathcal{P}$ et sa trace QT dans le plan $Z = 0$. La droite TP est donc tangente à la projection ($\mathcal{P}$) de ($\mathcal{P}$) sur le plan $Z = 0$. L'ellipse ($\mathcal{P}$) est unique et bien déterminée, par la donnée de son grand axe $\vec{MY}$, son excentricité $e = \sqrt{3}/2$ et sa tangente $\vec{TP}$ en $\mathcal{P}$. En effet,

par une affinité orthogonale d'axe $\vec{MY}$ et de rapport 2, (P) est transformée en un cercle (C) , centré sur $\vec{MY}$ et tangent en C à $\vec{TC}$. Ce cercle est unique et centré en ω .

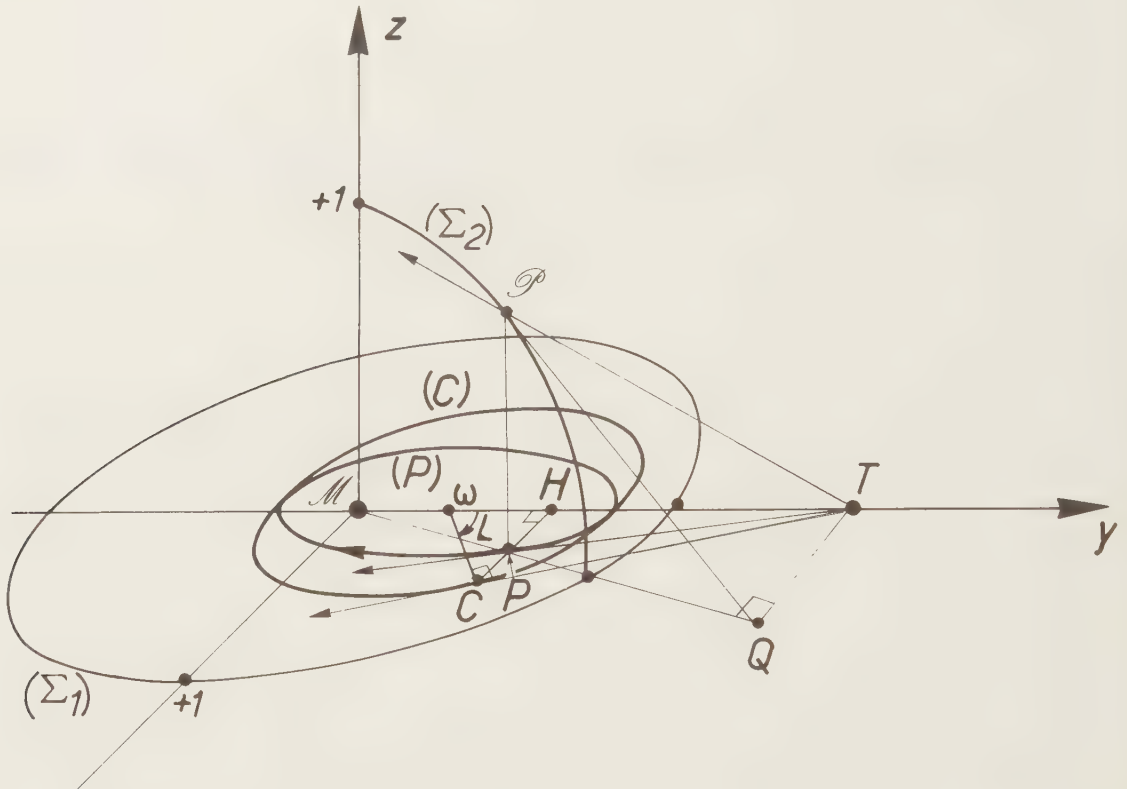


Fig. 1

$\mathcal{PP}$ est la polaire de Q par rapport au grand cercle (Σ_2) de (Σ) , donc QT est la polaire de P par rapport au grand cercle (Σ_1) de (Σ) , et enfin PH est la polaire de T par rapport à (Σ_1) , donc : $MH \cdot MT = 1$

D'où :

$$\cotg\left(\frac{\pi}{2} - L\right) = \tg L = \frac{HT}{HC} = \frac{MT - MH}{HC} = \frac{\frac{1}{Y} - Y}{2X} = \frac{1 - Y^2}{2XY}.$$

Portant les valeurs de X' , Y' et L' dans (3), on tire

$$(4) \quad \tg \delta = \frac{\Delta e_{\parallel}^2 - \frac{3}{4} \Delta \vartheta^2 - \Delta C^2}{\Delta e_{\parallel} \Delta e_{\perp}}$$

en fonction de la consommation ΔC , cette dernière étant elle-même fournie par l'équation bicarrée :

$$(5) \quad \left(-\Delta e_{\parallel}^2 + \frac{3}{4} \Delta \vartheta^2 + \Delta C^2\right) \left(\Delta e_{\perp}^2 + \Delta j^2 + \frac{\Delta \vartheta^2}{4} - \Delta C^2\right) + \Delta e_{\perp}^2 (\Delta e_{\parallel}^2 - \Delta \vartheta^2) = 0$$

obtenue en portant les valeurs de X' , Y' et Z' dans l'équation (2).

$tg \delta$ peut également être tiré directement de l'équation du second degré (II,5 - 4).

Les inégalités (II,5 - 6) sont satisfaites si :

$$(6) \quad \Delta e_{//}^2 \leq \Delta \vartheta^2.$$

Les solutions de type I correspondent à des points du plan $\Delta e_{//} \Delta e_{\perp}$ à l'intérieur de la bande $|\Delta e_{//}| < |\Delta \vartheta|$ (fig. 2).

Les inégalités (II,5 - 5) sont satisfaites si :

$$(7) \quad tg^2 \delta \geq \frac{\Delta \vartheta^2}{\Delta e_{//}^2} - 1 = tg \delta' tg \delta'' \geq 0$$

où $tg \delta'$ et $tg \delta''$ sont les racines de (II,5 - 4).

Il faut donc que le carré de la racine de (II,5 - 4) adoptée soit supérieur ou égal au produit des racines. Ceci n'est possible que pour une seule racine de cette équation, celle dont le module est maximal.

Comme le numérateur de l'expression (4) de $tg \delta$ est négatif (car $Y^2 \leq 1 \Rightarrow \Delta C^2 \geq \frac{\Delta \vartheta^2}{4}$), cette condition montre que la consommation ΔC est donnée par la plus grande des racines de l'équation bicarrée (5).

Enfin, la condition d'angle utile

$$(8) \quad |Z| \geq \sqrt{3} |X| :$$

s'écrit, dans le cas limite

$$|\Delta e_{//}| |tg \delta| = \frac{\sqrt{3} (\Delta e_{//}^2 - \Delta \vartheta^2)}{|\Delta j| - \sqrt{3} |\Delta e_{\perp}|}$$

soit, en portant dans (4)

$$\left(\frac{|\Delta j|}{\sqrt{3}} - |\Delta e_{\perp}| \right) \left(\sqrt{3} |\Delta j| + |\Delta e_{\perp}| \right) = \Delta e_{//}^2 - \Delta \vartheta^2$$

soit encore :

$$(9) \quad \Delta e_{//}^2 + \left(|\Delta e_{\perp}| + \frac{|\Delta j|}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{4}{3} \Delta j^2 + \Delta \vartheta^2.$$

La frontière, dans le plan $\Delta e_{//} \Delta e_{\perp}$ est constituée par les arcs de cercle ($\sigma +$) et ($\sigma -$). On vérifie aisément que l'origine 0 ($\Delta e_{//} = \Delta e_{\perp} = 0$) satisfait à l'inégalité (8) et correspond donc à des solutions de type I.

2. TYPE II (bi-impulsionnel nodal).

Prenons l'axe de référence $\vec{Ox}$ selon la ligne des nœuds. Les impulsions $I' \Delta C$ et $I'' \Delta C$ ($I' + I'' = 1$) appliquées aux points $\mathcal{M}'$ ($L' = 0$) et $\mathcal{M}''$ ($L'' = \pi$) provoquent les variations :

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta \xi = 0 \\ \Delta \eta = -|\vec{\Delta j}| = -Z' \Delta C \\ \Delta \vartheta = 2Y' (I' - I'') \Delta C \\ \Delta \alpha = \Delta e_{//} = 2Y' \Delta C \\ \Delta \beta = \Delta e_{\perp} = -X' \Delta C \end{cases}$$

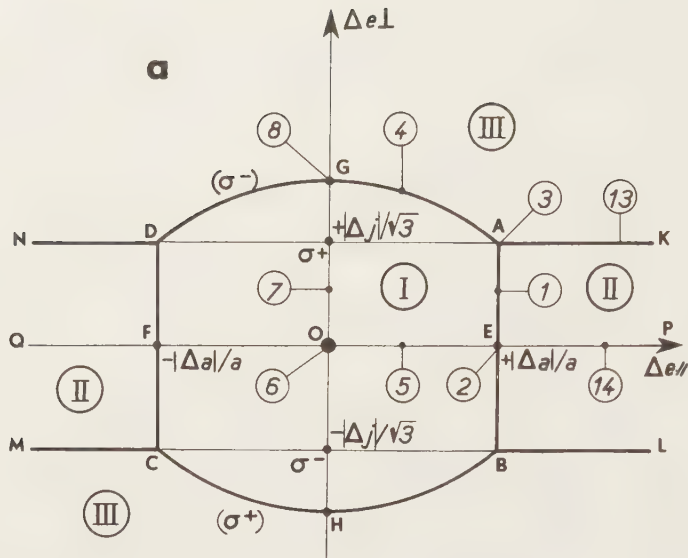
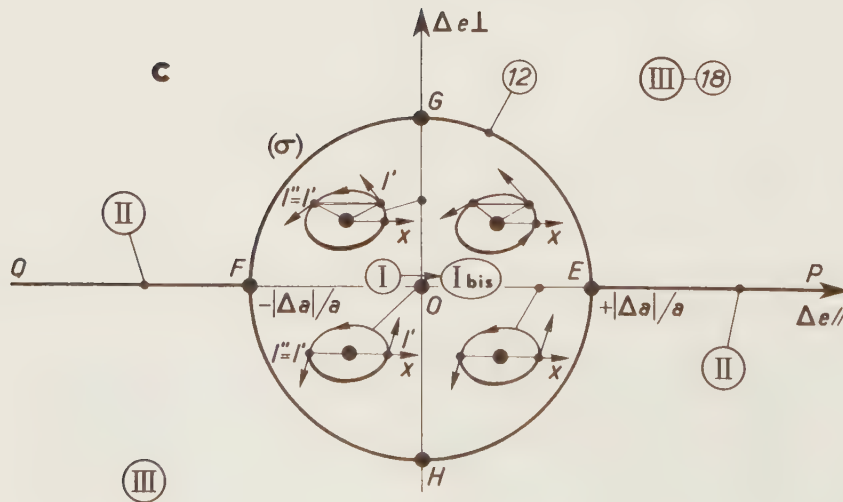
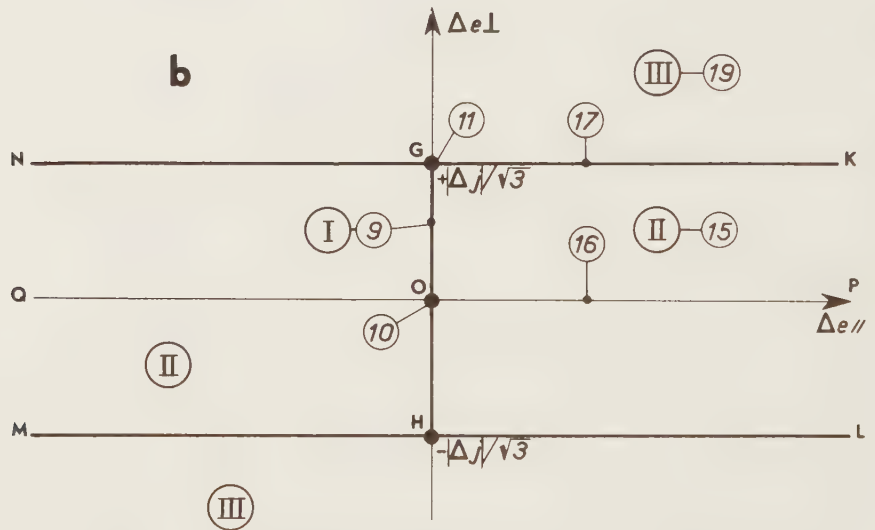


Fig. 2 - Détermination du type de transfert.

a : Cas général

b : $\Delta a = 0$

c : $\Delta j \rightarrow 0$.



D'où les relations (II,5. 11-14).

Les inégalités (II,5 - 11) sont satisfaites si

$$(11) \quad \Delta e_{\parallel}^2 \geq \Delta a^2.$$

Les solutions de type II correspondent à des points du plan $\Delta e_{\parallel}$ $\Delta e_{\perp}$ obligatoirement situés à l'extérieur de la bande $|\Delta e_{\parallel}| < |\Delta a|$ (fig. 2).

La condition d'angle utile (8) s'écrit ici :

$$(12) \quad |\Delta e_{\perp}| \leq \frac{|\Delta j|}{\sqrt{3}}.$$

Le point $\Delta e_{\parallel}$ $\Delta e_{\perp}$ est donc à l'intérieur de la bande définie par (12).

Ecrivant enfin que $X' Y' Z'$ sont des cosinus directeurs, ($X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 1$) on obtient la consommation :

$$(13) \quad \boxed{\frac{\Delta e_{\parallel}^2}{4} + \Delta e_{\perp}^2 + \Delta j^2 = \Delta C^2}$$

3. TYPE III (Singulier, tridimensionnel).

Pour que le point G soit intérieur au volume ($\mathcal{V}$) limité par les cylindres ($\mathcal{C}_I$) et ($\mathcal{C}_{II}$), il faut que W (projection de G sur le plan $z_1 = 0$) (fig. II,5 - 12) soit intérieur au cercle ($\mathcal{C}$), soit :

$$(14) \quad \Delta \xi^2 + \Delta \eta^2 \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta \xi \Delta C = \Delta j^2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \overrightarrow{\Delta j_1} \cdot \overrightarrow{\Delta C} \leq 0$$

et que U (projection de G sur le plan $x_1 = 0$) soit situé dans la partie concave de la parabole ($\mathcal{P}$) :

$$(15) \quad \frac{\Delta a^2}{4} \leq \Delta C^2 \mp \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta \xi \Delta C = \Delta C^2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \overrightarrow{\Delta j_1} \cdot \overrightarrow{\Delta C}$$

dans la région :

$$(16) \quad y_1 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta \xi = \mp \overrightarrow{\Delta j_1} \cdot \frac{\overrightarrow{\Delta C}}{|\overrightarrow{\Delta C}|} > 0.$$

Multiplions l'équation vectorielle (II,5 - 19) par $\overrightarrow{\Delta j_1}$:

$$(17) \quad \overrightarrow{\Delta j_1} \cdot \overrightarrow{\Delta e} \mp \sqrt{3} \overrightarrow{\Delta j_1}^2 = |\overrightarrow{\Delta j_1}| \Delta e_{\perp} \mp \sqrt{3} \overrightarrow{\Delta j_1}^2 = 2 \overrightarrow{\Delta C} \cdot \overrightarrow{\Delta j_1}.$$

Portant cette valeur de $\overrightarrow{\Delta C} \cdot \overrightarrow{\Delta j_1}$ dans l'inégalité (14) il vient :

$$(18) \quad \mp \sqrt{3} \Delta e_{\perp} \geq |\overrightarrow{\Delta j_1}| > 0$$

donc, tout d'abord,

$$(19) \quad \boxed{\pm = - \text{signe } \Delta e_{\perp}}$$

ce qui permet de choisir entre les orientations (π^+) et (π^-), puis :

$$(20) \quad |\Delta e_{\perp}| \geq \frac{|\overrightarrow{\Delta j_1}|}{\sqrt{3}}.$$

L'ellipse ($\mathcal{P}$) correspondante est intérieure à la sphère (Σ) et tangente en $\mathcal{P}$ à cette sphère. L'ellipse ($\mathcal{P}$) projection de ($\mathcal{P}$) sur le plan $Z = 0$ est intérieure à l'ellipse ($\mathcal{P}_{\text{II}}$) projection sur $Z = 0$ des cercles ($\mathcal{C}^+$) et ($\mathcal{C}^-$) (condition imposée par le "dièdre utile").

Il existe, en général, deux ellipses "d'efficacité" ($\mathcal{P}_{\text{I}}$) et ($\mathcal{P}_{\text{II}}$) bitangentes intérieurement à (Σ'), l'un des points de contact étant $\mathcal{P}$, relatives à des solutions respectivement de type I et de type II.

La projection de ($\mathcal{P}_{\text{I}}$) sur le plan $Z = 0$ est l'ellipse ($\mathcal{P}_{\text{I}}$) ($\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$) de grand axe $\overrightarrow{MY}$, tangente en $\mathcal{P}$ à la droite $\mathcal{PT}_{\text{I}}$. Le cylindre (σ_{I}) est donc bien déterminé. De plus ($\mathcal{P}_{\text{I}}$) est contenue dans le plan (π_{I}) passant par $\overrightarrow{MY}$ et $\mathcal{P}$. Elle est tangente en $\mathcal{P}$ à la droite $\mathcal{PT}_{\text{I}}$.

La projection de ($\mathcal{P}_{\text{II}}$) sur le plan $Z = 0$ est l'ellipse ($\mathcal{P}_{\text{II}}$) ($\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$) de grand axe $\overrightarrow{MY}$ et de petit axe $\overrightarrow{MX}$, passant par le point $\mathcal{P}$. Le cylindre (σ_{II}) est donc bien déterminé. ($\mathcal{P}_{\text{II}}$) est contenue dans le plan (π_{II}) passant par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{MT}_{\text{II}}$. Elle est tangente en $\mathcal{P}$ à la droite $\mathcal{PT}_{\text{II}}$.

Ainsi toute solution mono-impulsionnelle peut-elle être considérée comme cas limite soit d'une solution bi-impulsionnelle de type I, soit d'une solution bi-impulsionnelle de type II, lorsque l'une des deux impulsions devient nulle. (Arc de cercle $\widehat{PN}$ de la figure II,5 - 11 b).

Lorsque le point $\mathcal{P}$ de la figure 3 est sur $\mathcal{P}_{\text{III}}$, les deux courbes d'efficacité ($\mathcal{P}_{\text{I}}$) et ($\mathcal{P}_{\text{II}}$) coïncident avec l'un des cercles ($\mathcal{C}^+$) ou ($\mathcal{C}^-$). La solution impulsionnelle [une impulsion dans l'un des plans (π^+) ou (π^-)] peut alors être considérée comme cas limite de solutions de type I, II ou III (point "triple" N de la figure II,5 - 11 b).

En particulier le point $\mathcal{R}$ (ou $\mathcal{S}$) correspond aux solutions mono-impulsionnelles tangentes (arc de cercle $\widehat{F_2 M_2}$ de la figure II,5 - 11 c).



SOMMAIRE

Le problème des transferts et des rendez-vous optimaux (consommation de masse minimale) entre orbites est fondamental en dynamique spatiale. Ces études, relativement nouvelles, font appel à la fois à la "Mécanique Céleste" classique et aux méthodes modernes d'optimisation dérivées du "Calcul des Variations" ("Théorie du domaine de manoeuvrabilité" de CONTENSOU, "Principe du Maximum" de PONTRYAGIN).

La solution analytique de ce problème est difficile et la plupart des études utilisent des méthodes d'optimisation numériques. Cependant, un certain nombre de résultats analytiques a pu être obtenu, pour un champ central, dans le cas des transferts optimaux de *durée indifférente* ainsi que dans le cas des transferts optimaux de *durée fixée* entre orbites proches pour des systèmes de propulsion à *vitesse d'éjection modulable et à puissance limitée* [Systèmes ($\mathcal{S}_2$)].

Par contre, le cas des transferts optimaux de *durée fixée* entre orbites proches, pour des systèmes de propulsion à *vitesse d'éjection constante et à poussée limitée* [Systèmes ($\mathcal{S}_1$)], a, jusqu'à présent, été peu étudié.

Le but du présent travail est essentiellement d'apporter une contribution à l'étude de ce dernier type de transferts et de comparer les résultats obtenus avec leurs homologues relatifs aux systèmes de propulsion ($\mathcal{S}_2$).

Après un court rappel de la méthode d'optimisation utilisée, le problème des transferts optimaux est défini et d'abord étudié dans le cas d'un champ de gravitation quelconque, ce qui met nettement en lumière les différences entre les solutions correspondant aux divers systèmes de propulsion : pour les systèmes ($\mathcal{S}_2$), la poussée est modulée au cours du transfert; pour les systèmes de propulsion ($\mathcal{S}_1$), il y a (sauf cas singulier) succession d'arcs à poussée maximale et d'arcs balistiques.

Toutes ces solutions font cependant appel à la même notion de "vecteur efficacité", indiquant la direction optimale de poussée, dont une interprétation géométrique est donnée (fig. I,2 - 7) : ce vecteur a pour origine le mobile $\mathcal{M}$ et pour extrémité un mobile "pilote" $\mathcal{P}$, proche de $\mathcal{M}$, soumis à la même accélération de poussée et au même champ de gravitation que $\mathcal{M}$, et décrivant une "courbe directrice" ($\mathcal{D}$) proche de la trajectoire de transfert ($\mathcal{T}$) de $\mathcal{M}$.

Dans le cas d'un champ de gravitation central, l'intérêt de l'emploi des éléments de l'orbite képlérienne ($\mathcal{O}$), osculatrice à la trajectoire ($\mathcal{T}$) de $\mathcal{M}$ à chaque instant, comme composantes de l'"état" est évident. Le calcul des perturbations des éléments de l'orbite directrice osculatrice ($\mathcal{O}_p$) à la trajectoire ($\mathcal{D}$) du mobile pilote $\mathcal{P}$ fournit, entre autres, l'intégrale première vectorielle associée à la rotation d'ensemble qui vient s'ajouter à l'intégrale première de l'Hamiltonien.

L'hypothèse des faibles écarts (d'ordre ε) de l'orbite osculatrice au cours du transfert par rapport à une orbite nominale de référence permet la linéarisation du problème. L'adjoint est alors constant et la résolution du problème d'optimisation se fait en trois étapes :

1. L'adjoint étant donné *a priori*, on en déduit la loi de poussée optimale.
2. Cette poussée optimale est portée dans les équations linéarisées du mouvement qui sont intégrées. On en déduit les variations des éléments orbitaux et la consommation en fonction de l'adjoint.
3. L'adjoint est déterminé *a posteriori* à partir des variations des éléments imposées par le transfert

(inversion) et la consommation s'en déduit, ainsi que la loi de poussée optimale.

Chacune de ces étapes est beaucoup plus délicate pour les systèmes de propulsion ($\mathcal{S}_1$) que pour les systèmes de propulsion ($\mathcal{S}_2$). En effet, dans ce premier cas :

1. La détermination des points de commutation séparant les arcs de poussée maximale des arcs balistiques conduit à la résolution d'une équation de degré ≤ 6 . Cette détermination est facilitée par l'utilisation de la notion de "courbe d'efficacité" ($\mathcal{P}$) ou lieu du mobile pilote $\mathcal{P}$ dans les axes tournants (fig. I,3 - 4).
2. L'intégration est difficile. Elle conduit en général à des intégrales de type elliptique ou plus compliquées.
3. L'inversion ne peut, en général, se faire que par approximations successives.

Les résultats généraux obtenus dans ce travail sont, entre autres, les suivants :

Dans le cas des transferts entre orbites quasi-circulaires d'excentricité $e \leq$ ordre $\varepsilon \ll 1$, la "courbe d'efficacité" ($\mathcal{P}$) est particulièrement simple (ellipse) et il n'y a jamais, pour un transfert sans rendez-vous et sauf cas singulier, plus de deux arcs de poussée maximale ou, à la limite, deux impulsions par révolution.

Dans le cas d'un transfert entre orbites elliptiques proches quelconques, il peut y avoir, au plus, trois arcs de poussée maximale (ou, à la limite, trois impulsions) par révolution.

Les cas singuliers (du problème linéarisé) où la solution linéarisée n'est plus unique mais dégénère en un grand nombre de solutions (une certaine liberté est laissée dans le choix de la position des points d'application et de la grandeur de la poussée) ne peuvent se présenter que pour des transferts entre orbites quasi-circulaires ($e \leq$ ordre $\varepsilon \ll 1$). Il existe, dans ce cas, deux types de solutions singulières : le type I bis (singulier, plan) où la poussée optimale est tangentielle (fig. I,3 - 11) et le type III (singulier, tridimensionnel) où la poussée optimale est située dans l'un des deux plans tangents à l'orbite faisant un angle de 30° avec le plan horizontal local (fig. I,3 - 12).

Sont obtenus ensuite des résultats concernant les phénomènes d'induction (variations, non imposées, de certains éléments orbitaux, induites par les variations imposées des autres éléments orbitaux).

Il y a non-induction mutuelle entre la rotation du plan de l'orbite et les modifications dans le plan de l'orbite, mais il n'y a pas découplage entre les deux problèmes (addition des solutions) comme c'est le cas pour les systèmes ($\mathcal{S}_2$).

Si on appelle classe de transferts l'ensemble des transferts pour lesquels seules certaines variations particulières des éléments orbitaux sont imposées, il est possible d'énoncer le résultat suivant, pour le choix d'éléments orbitaux fait dans cette étude : pour un nombre entier de révolutions (ou un grand nombre de révolutions), il y a au moins onze classes de transferts sans rendez-vous où les variations imposées n'induisent aucune autre variation, sur un total de trente et une classes de transferts sans rendez-vous.

Dans le cas des transferts entre orbites quasi-circulaires ($e \leq$ ordre $\varepsilon \ll 1$), il y a, au moins, quatorze classes de transferts sur dix neuf, satisfaisant à cette condition; en particulier, toutes les classes où la variation d'un seul élément ou bien les variations de deux éléments sont imposées.

L'étude analytique est alors poussée plus avant pour certaines classes particulières de transfert qui présentent un intérêt pratique évident. La complexité de l'étude de ces cas particuliers croît avec le nombre des éléments orbitaux dont la variation est imposée, si bien que, en contrepartie, des hypothèses simplificatrices de plus en plus importantes doivent être faites.

1. La "dilatation" infinitésimale optimale du demi-grand axe est ainsi traitée dans le cas elliptique pour un nombre entier (ou un grand nombre $N \geq 0(1/\varepsilon)$) de révolutions. La poussée maximale est tangentielle et appliquée à chaque révolution sur un arc entourant le périhélie (fig. II,1 - 2).

2. La rotation infinitésimale optimale du plan de l'orbite est également traitée dans les mêmes

hypothèses. La poussée maximale est normale au plan de l'orbite et appliquée sur un ou deux arcs à chaque révolution (fig. II,2 - 4).

3. Les transferts optimaux entre orbites circulaires coplanaires proches sont étudiés pour un angle de transfert quelconque.

Il faut y faire la distinction entre les solutions régulières et les solutions singulières (du problème linéarisé) qui ne peuvent apparaître que pour un angle de transfert supérieur à 180° .

Les solutions régulières comportent une alternance d'arcs à poussée maximale et d'arcs balistiques (fig. II,3 - 6 et 7). La poussée optimale est antisymétrique par rapport à l'axe de symétrie de l'arc de transfert. La loi d'orientation de la poussée et la "dilatation" spécifique du rayon de l'orbite circulaire (dilatation par unité de vitesse caractéristique) dépendent non seulement de l'angle de transfert mais encore du rapport entre la "dilatation" du rayon de l'orbite et la poussée maximale dont on dispose.

Les solutions singulières sont de type I bis (singulier plan) et correspondent à une application tangentielle de la poussée. Il y a dégénérescence de la solution linéarisée. Il suffit en effet de répartir la poussée le long de l'arc de transfert de telle façon que la "dilatation" voulue soit obtenue et que le "centre de masse" de la répartition soit au centre de l'orbite (fig. II,3 - 18). Ces solutions singulières sont particulièrement importantes car la "dilatation" spécifique est alors maximale (dans l'étude linéarisée).

Cette dégénérescence disparaît par une étude aux ordres supérieurs de ces solutions singulières.

4. L'étude aux ordres supérieurs traite plus généralement des transferts optimaux plans de type Hohmann entre orbites quasi-circulaires proches, coaxiales directes, non sécantes.

Ces transferts sont réalisés de façon économique en utilisant la solution bi-impulsionnelle de Hohmann, si la poussée du propulseur n'est pas limitée (fig. II,4 - 9). Dans le cas contraire, ils consistent en une succession d'arcs de poussée maximale, de durée faiblement décroissante, d'abord au périégée, puis à l'apogée (fig. II,4 - 16).

La poussée optimale est pratiquement appliquée suivant la bissectrice de l'angle formé par l'horizontale locale et la tangente à la trajectoire.

Les angles au centre des arcs périégée et des arcs apogée sont respectivement égaux entre eux si la vitesse d'éjection est grande devant la vitesse d'orbitation, sinon ils décroissent faiblement.

La différence entre la vitesse caractéristique (intégrale de l'accélération de poussée) d'une telle solution et celle de la solution de Hohmann relative au même transfert, est du troisième ordre par rapport à l'importance du transfert, même pour des arcs de poussée relativement longs. Cela explique la dégénérescence constatée dans l'étude linéarisée de telles solutions.

5. Les transferts optimaux entre orbites quasi-circulaires ($\epsilon \ll \text{ordre } \epsilon \ll 1$) proches, coplanaires ou non, sont étudiés en supposant que le propulseur est capable de fournir des impulsions et que la durée du transfert est suffisamment grande pour qu'il soit possible d'utiliser la solution obtenue en faisant dans les calculs l'hypothèse de la durée indifférente (une révolution suffit dans tous les cas).

Suivant le transfert à réaliser, la solution optimale est de l'un des quatre types suivants (fig. II, 5 - 3) :

Type I : bi-impulsionnel (deux impulsions bien déterminées).

Type II : bi-impulsionnel, nodal (deux impulsions bien déterminées appliquées aux nœuds).

Type I bis : singulier, plan.

Type III : singulier, tridimensionnel.

Les deux derniers types ont déjà été mentionnés plus haut. La dégénérescence de ces solutions singulières disparaît si le transfert a lieu non plus entre orbites quasi-circulaires ($\epsilon \ll \text{ordre } \epsilon \ll 1$)

mais entre orbites elliptiques de faible excentricité ($\mathcal{E} \ll e \ll 1$). Les solutions optimales sont alors mono-, bi- ou tri-impulsionnelles.

Le "domaine accessible" (ensemble des transferts pouvant être réalisé avec une vitesse caractéristique donnée) est analysé en détail (fig. II,5 - 11).

6. La solution relative aux rendez-vous optimaux de longue durée entre orbites quasi-circulaires proches, coplanaires ou non, se déduit simplement de celle relative aux transferts.

Suivant le rendez-vous à réaliser, la solution optimale est de type I, I bis, II, III (comme dans le cas du transfert) ou, pour les rendez-vous lointains, de deux types nouveaux : type IV, à quatre impulsions (qui peuvent être réduites à trois) et type IV bis, singulier, plan (fig. II,6 - 8).

En conclusion, les transferts optimaux de durée fixée, entre orbites elliptiques proches, dont l'intérêt pratique est évident puisqu'ils sont liés aux problèmes de corrections d'orbites, peuvent être étudiés analytiquement avec un certain succès même dans le cas de systèmes de propulsion à vitesse d'éjection constante et à poussée limitée. La solution analytique complète peut être obtenue pour certaines classes particulières de transferts.



ABSTRACT

The problem of optimal transfers and of optimal rendez-vous (minimum mass consumption) between orbits is fundamental in space dynamics. These studies, relatively new, are based at the same time on classical "Celestial Mechanics" and on modern optimization methods derived from "Calculus of Variations" (CONTENSOU's "Theory of the manoeuvrability domain", PONTRYAGIN's "Maximum Principle").

The analytical solution of this problem is difficult and in most investigations, numerical optimization methods are used. However, some analytical results were obtained, for a central force field, in the case of optimal transfers of *indifferent duration* ("time-free transfers") as well as in the case of optimal transfers of *fixed duration* between *close orbits* for *systems of propulsion giving a modulable ejection velocity and of limited power* [(S_2) systems].

On the contrary, little work has been done on time-free transfers between *close orbits*, for *systems of propulsion giving a constant ejection velocity and of limited thrust* [(S_1) systems].

In this work, our aim has been essentially to contribute to the study of the latter type of transfers and to compare the results obtained with those concerning the systems of propulsion (S_2).

Following a short review of the optimization method utilized, the problem of optimal transfers is defined and studied firstly in the case of any gravity field, which sheds light directly on differences between the solutions corresponding to various propulsion systems : for the (S_2) systems the thrust is modulated during the transfer; for the (S_1) systems maximum thrust arcs and coasting arcs are used alternately (except in singular cases).

However all these solutions are based on the same notion of "primer vector" indicating the optimal direction for the thrust, and whose geometrical interpretation is given in figure (I.2 - 7) : this vector originates in the mobile M and its extremity is the pilot mobile P , close to M , submitted to the same acceleration and to the same gravity field as M , and describing a "directrix curve" ($\mathcal{D}$) close to the transfer trajectory ($\mathcal{C}$) of M .

In the case of a central gravity field, the interest of using elements of the Keplerian orbit ($\mathcal{O}$), osculating to the trajectory ($\mathcal{C}$) of M at each instant, as components of "state" is obvious. The calculation of the perturbations of the elements of the osculating directrix orbit ($\mathcal{O}_p$) to the trajectory ($\mathcal{D}$) of pilot mobile P provides, among other things, the vectorial first integral associated to the rotation of the whole, which adds up to the Hamiltonian first integral.

The assumption of small variations (of order ε) of the osculating orbit during a transfer, with respect to a reference nominal orbit, allows the linearization of the problem. The adjoint vector is then constant and the optimization problem is solved in three steps :

1. The adjoint vector being given a priori, we deduce the optimal thrust law.
2. This optimal thrust is brought into the linearized equations of motion which are then integrated. Variations of the orbital elements and consumption as a function of the adjoint are then deduced.
3. The adjoint vector is determined a priori from variations of the elements imposed by the transfer (inversion) and consumption is deduced from it, as well as the optimal thrust law.

Each one of these steps is much more difficult for the $(\mathcal{S}_1)$ propulsion systems than it is for the $(\mathcal{S}_2)$ systems. In effect, in the first case :

1. The determination of the switching points, separating the maximum thrust arcs from the coasting arcs, leads to the solution of an equation of degree ≤ 6 . This determination is made easier by using the notion of "efficiency curve" ("primer locus") $(\mathcal{P})$ or locus of the pilot mobile $\mathcal{P}$ in the rotating axis coordinates (fig. I.3 - 4).
2. The integration is difficult. Generally it leads to elliptical integrals or more complicated integrals.
3. Generally, the inversion can be done by successive approximations only.

The general results obtained in this work are, among others, the following ones :

In the case of transfers between near-circular orbits of eccentricity $e \leq \text{order } \varepsilon \ll 1$, the "primer locus" $(\mathcal{P})$ is particularly simple (ellipse) and there is never for a transfer without rendez-vous and except in singular cases, more than two maximum thrust arcs or, at the limit, two impulses per revolution.

In the case of a transfer between any close elliptical orbits there may be, at most, three maximum thrust arcs (or, at the limit, three impulses) per revolution.

The singular cases (of the linearized problem) where the linearized solution is not unique but degenerates into a large number of solutions (certain freedom is left to choose the position of the point of application and of the thrust level) can only occur in the case of transfers between near-circular orbit transfers ($e \leq \text{order } \varepsilon \ll 1$). In this case, there are two types of singular solutions : type I bis (singular, plane) where the optimal thrust vector is tangential (fig. I.3 - 11) and type III (singular, three-dimensional) where the optimal thrust is situated in one of the two planes tangent to the orbit making an angle of 30° with the local horizontal plane (fig. I.3 - 12).

Then the results concerning the induction phenomena (non-imposed variations, of some orbital elements, induced by the imposed variations of the other orbital elements) are obtained.

There is no mutual induction between the rotation of the plane of the orbit and the modifications in the plane of the orbit, but there is no uncoupling between the two problems (addition of the solutions) as it is the case for systems $(\mathcal{S}_2)$.

If we call category of transfers the group of transfers for which only certain particular variations of the orbital elements are imposed, then it is possible to state the following result, for the choice of orbital elements made in this study : for a integer number of revolutions (or a great number of revolutions), there are at least eleven categories of transfers, without any rendez-vous and in which the imposed variations do not induce any other variation, out of a total of 31 categories of transfers without any rendez-vous.

In the case of transfers between near-circular orbits ($e \leq \text{order } \varepsilon \ll 1$), there are, at least, 14 categories of transfers out of 19, which satisfy this condition; in particular, all the classes in which the variation of only one element or the variation of two elements are imposed.

The analytical study is then more advanced for certain particular classes of transfer which present an obvious practical interest. The complexity of the study of these particular cases increases with the number of orbital elements whose variation is imposed, so that, as a counter part, simplifying assumptions more and more important must be made.

1. The optimal infinitesimal "dilatation" of the semi-major axis is thus treated in the elliptical case for an integer number of revolution [or a large number $N \gg 0(1/\varepsilon)$]. The maximum thrust is tangential and applied at each revolution along an arc around the perigee, (fig. II.1 - 2).

2. The optimal infinitesimal rotation of the orbital plane is also treated with the same assumptions. The maximum thrust is normal to the orbital plane and applied along one or two arcs at each revolution (fig. II.2 - 4).

3. The optimal transfers between close, co-planar, circular orbits are studied in the case of any transfer angle.

It is necessary to make distinction between the regular solutions and the singular solutions (of the linearized problem) which can only occur when the transfer angle is greater than 180° .

The regular solutions comprise a succession of maximum thrust arcs alternating with coasting arcs (fig. II.3 - 6 and 7). The optimal thrust is antisymmetrical with respect to the axis of symmetry of the transfer arc. The law of the thrust direction and of the specific dilatation of the circular orbit radius (dilatation per characteristic velocity unit) depend upon, not only the transfer angle, but also the ratio of the orbit radius dilatation to the maximum thrust which is available.

The singular solutions are of type I bis (singular, plane) and correspond to a tangential application of the thrust vector. There is degeneracy of the linearized solution. In effect it is sufficient to distribute the thrust along the transferring arc in such a way that the desired dilatation is obtained and that the center of mass of the distribution is at the center of the orbit (fig. II.3 - 18). These singular solutions are particularly important because the specific dilatation is then maximum (in the linearized study).

This degeneracy disappears if we make a study at higher orders of these singular solutions.

4. The higher order study deals more generally with plane, optimal transfers of the HOHMANN's type, between non-intersecting, direct co-axial, close, near-circular orbits.

These transfers are obtained economically by use of the two-impulse HOHMANN solution, if the thrust is not limited (fig. II.4 - 9). On the contrary, they are made of a succession of maximum thrust arcs of slightly decreasing duration, first at the perigee, then at the apogee (fig. II.4 - 16).

The optimal thrust is practically applied along the bisectrix of the angle formed by the local horizontal and the tangent to the trajectory.

The angles at the center of the perigee arcs and apogee arcs are respectively equal if the ejection velocity is large as compared to the orbital velocity; on the contrary, if it is not the case, they decrease slightly.

The difference between the characteristic velocity (integral of the thrust acceleration) of such a solution and the characteristic velocity of a HOHMANN's solution related to the same transfer, is of the third order with respect to the importance of the transfer, even for thrust arcs relatively long. This explains the degeneracy found in the linearized investigation of such solutions.

5. The optimal transfers between coplanar or non-coplanar, close, near-circular orbits ($e \leq \text{order } \varepsilon \ll 1$) are studied assuming that the engine can give impulses and that the transfer duration lasts sufficiently to allow using the solution obtained by making the assumption, in the calculations, of an indifferent duration (one revolution is sufficient in all the cases).

The optimal solution is of one of the four following types according to the type of transfer to be obtained (fig. II.5 - 3) :

Type I : two-impulsional (two well determined impulses).

Type II : two-impulsional, nodal (two well determined impulses applied at the nodes).

Type I bis : singular, plane.

Type III : singular, three-dimensional.

The last two types have already been mentioned above. The degeneracy of these singular solutions disappears if the transfer takes place, no longer between near-circular orbits ($e \leq \text{order } \varepsilon \ll 1$), but between elliptical orbits of low eccentricity ($\varepsilon \ll e \ll 1$). The optimal solutions are then one-, two- or three-impulsional.

The "reachable domain" (set of transfers obtainable with a given characteristic velocity) is analysed in details (fig. II.5 - 11).

6. The solution concerning long duration, optimal rendez-vous between coplanar or non-coplanar, close, near-circular orbits is simply deduced from the solution concerning the transfers.

The optimal solution is of type I, I bis, II, III (like in the transfer case) according to the rendez-vous to be obtained or, for large angular lags, the optimal solution is of two new types : type IV, using four impulses (which may be reduced to three impulses) and type IV bis, singular, plane (fig. II.6 - 8).

In conclusion, the optimal transfers of fixed duration between close elliptical orbits, whose practical interest is obvious since they are linked to problems of orbit corrections, may be studied analytically with some success even in the case of constant ejection velocity propulsion systems using a limited thrust. The complete analytical solution may be obtained for some particular categories of transfers.



ZUSAMMENFASSUNG

Das Problem der optimalen (minimaler Massenverbrauch) Überführungen und Begegnungen von Umlaufsbahnen ist grundlegend in der Raumfahrt-dynamik. Diese, verhältnismässig neuen, Untersuchungen berufen sich sowohl auf die klassische "Himmelsmechanik" als auch auf moderne, aus der "Variationsrechnung" abgeleitete, Optimisationsmethoden (Theorie des "Manövrierbarkeitsbereiches" von CONTENTOU, "Maximumsprinzip" von PONTRYAGIN).

Die analytische Lösung des Problems ist schwierig und die meisten der Untersuchungen benützen numerische Optimisationsmethoden. Gleichwohl konnte, für ein Zentralfeld, eine Anzahl analytischer Lösungen erhalten werden und zwar sowohl im Falle optimaler Überführungen beliebiger Dauer als auch im Falle optimaler Überführungen festgelegter Dauer zwischen benachbarten Bahnen, für Vortriebssysteme mit modulierbarer Ausschubgeschwindigkeit und mit begrenzter Leistung (Systeme (S_2)).

Dagegen wurde der Fall optimaler Übergänge festgelegter Dauer zwischen benachbarten Bahnen für Vortriebssysteme konstanter Ausschubgeschwindigkeit und begrenztem Schub (Systeme (S_1)) bis jetzt wenig untersucht.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist im wesentlichen ein Beitrag zur Untersuchung dieses letzteren Typs von Überführungen und der Vergleich der erhaltenen Ergebnisse mit den entsprechenden, auf die Vortriebssysteme (S_2) bezüglichen.

Nach einem kurzen ins Gedächtnis rufen der verwendeten Optimisierungsmethode, wird das Problem optimaler Überführungen definiert und zunächst für den Fall eines beliebigen Gravitationsfeldes untersucht. Dies setzt klar ins Licht die Unterschiede zwischen den Lösungen die den verschiedenen Vortriebssystemen entsprechen: für die Systeme (S_2) wird der Schub während der Überführung moduliert; für die Systeme (S_1) hat man (ausser in singulären Fällen) eine Folge von Bogen maximalen Schubes und ballistischer Bogen.

Dessen ungeachtet, berufen sich alle diese Lösungen auf den gleichen Begriff des "Wirksamkeitsvektors", welcher die optimale Schubrichtung angibt und dessen geometrische Deutung die folgende ist (Abb. I, 2 - 7): der Vektor hat zum Ursprung den beweglichen Körper M und zum Endpunkt einen zu M benachbarten leitenden (pilotierenden) beweglichen Körper P , der derselben Suchbeschleunigung und demselben Gravitationsfeld unterworfen ist wie M und der eine Leitkurve ($\mathcal{D}$) beschreibt, die der Überführungsbahnkurve ($\mathcal{C}$) von M benachbart ist.

Im Falle eines zentralen Gravitationsfeldes ist das Interesse an der Verwendung der Elemente einer, in jedem Zeitpunkt die Bahn ($\mathcal{C}$) von M oskulierenden Keplerbahn ($\mathcal{O}$), als "Zustands"-komponente, evident. Die Störungsrechnung der Elemente der, die Bahn ($\mathcal{D}$) des beweglichen Leitpunktes P oskulierenden Leitbahn ($\mathcal{O}_P$) liefert, unter anderem, das, der Gesamtdrehung zugeordnete erste Vektorintegral, welches sich dem ersten Hamiltonintegral hinzufügt.

Die Annahme kleiner Abweichungen (während der Überführung) von der Grössenordnung ϵ , der oskulierenden Bahn und einer nominalen Bezugsbahn, gestattet die Linearisation des Problems. Der Adjunkt ist dann konstant und die Lösung der Optimierung erfolgt in drei Etappen:

1. Der Adjunkt ist von vorneherein gegeben, man bestimmt daraus das optimale Schubgesetz.
2. Dieser optimale Schub wird in die linearisierten Bewegungsgleichungen eingesetzt und diese werden integriert. Man folgert daraus die Variation der Bahnelemente und den Verbrauch als

Funktion des Adjunkten.

3. Der Adjunkt wird im nachhinein aus den, durch die Überführungsinversion vorgegebenen Elementenvariationen bestimmt und der Verbrauch daraus gefolgert, ebenso wie das Gesetz des optimalen Schubes.

Jede dieser Etappen ist merklich heikler für die Vortriebssysteme ($\mathcal{S}_1$) als für die Systeme ($\mathcal{S}_2$). In der Tat, in diesem ersten Falle :

1. führt die Bestimmung der Umschaltunkte die die Bogen maximalen Schubes von den ballistischen Bogen trennen, auf die Lösung einer Gleichung vom Grade ≤ 6 . Diese Bestimmung wird durch die Verwendung des Begriffes der "Wirksamkeitskurve" ($\mathcal{P}$) an Stelle des Leitkörpers $\mathcal{P}$ im System der bewegten Achsen (Abb. I,3-4), erleichtert.
2. ist die Intergration schwierig. Sie führt im allgemeinen auf elliptische oder noch kompliziertere Integrale.
3. kann die Inversion, im allgemeinen, nur durch sukzessive Näherung erfolgen.

Die, in dieser Arbeit erhaltenen, allgemeinen Ergebnisse sind, unter anderem, folgende :

Im Falle von Überführungen zwischen quasi-kreisförmigen Bahnen der Exzentrizität $e \leq$ Ordnung von $\mathcal{E} \ll 1$, ist die "Wirksamkeitskurve" ($\mathcal{P}$) besonders einfach (Ellipse) und man hat niemals, ausser in singulären Fällen, für eine Überführung ohne Begegnung mehr als zwei Bogen maximalen Schubes oder, im Grenzfall, zwei Impulsionen pro Umlauf.

Im Falle der Überführung zwischen beliebigen, benachbarten elliptischen Umlaufbahnen kann es höchstens drei Bogen mit Maximalschub (oder, im Grenzfall, drei Impulsionen) pro Umlauf geben.

Die singulären Fälle (des linearisierten Problems), in welchen die linearisierte Lösung nicht einzig ist, sondern in eine grosse Zahl von Lösungen entartet (eine gewisse Freiheit wird der Wahl der Lage der Anwendungsstellen des Schubes und dessen Grösse gelassen) können nur im Falle von Überführungen zwischen quasi-kreisförmigen Umlaufbahnen ($e \leq$ Ordnung $\mathcal{E} \ll 1$) auftreten. Es gibt in diesem Falle zwei Typen singulärer Lösungen : Typus Ia (singulär, eben), mit tangentialem, optimalem Schub (Abb. I,3-11) und Typus III (singulär, tridimensionnal), wo der optimale Schub sich in einer der beiden zur Bahn tangentialen Ebene befindet, die einen Winkel von 30° zur örtlichen horizontalen Ebene einschliessen (Abb. I,3-12).

In der Folge werden Ergebnisse über Induktionerscheinungen erhalten (nicht auferlegte Veränderungen von gewissen der Umlaufsbahnelemente, induziert durch bewusste Variationen der anderen Umlaufselemente).

Es gibt gegenseitige Nichtinduktion zwischen der Drehung der Umlaufsbahnebene und den Änderungen in der Bahnebene, aber es gibt keine Entkopplung zwischen den zwei Problemen (Addition der Lösungen), wie dies der Fall für die Systeme ($\mathcal{S}_2$) ist.

Nennt man Überführungsklasse die Menge der Überführungen welchen allein gewisse partikuläre Bahnelementsvariationen auferlegt sind, so ist es möglich, für die, im Rahmen dieser Untersuchung erfolgte Wahl der Bahnelemente, folgendes Ergebnis auszusprechen : für eine ganzzahlige Anzahl von Umläufen (oder eine grosse Zahl von Umläufen), gibt es, unter insgesamt ein-und-dreissig Klassen von Überführungen ohne Begegnung, mindestens elf Klassen von Überführungen ohne Begegnung, wo die auferlegten Veränderungen keine andere Veränderung induzieren.

Im Falle der Überführungen zwischen quasi-kreisförmigen Umlaufbahnen ($e \leq$ Ordnung $\mathcal{E} \ll 1$) gibt es unter neunzehn Überführungen mindestens vierzehn, welche diese Bedingung befriedigen; im besonderen alle Klassen mit Variation von einem oder von zwei Elementen.

Die analytische Untersuchung wird dann für einige besondere Klassen von Überführungen, welche ein offensichtliches praktisches Interesse bieten weiter entwickelt. Die Kompliziertheit der Untersuchung dieser besonderen Fälle steigt mit der Zahl der Umlaufsbahnelemente, deren Variation auferlegt wird, so dass, zum Ausgleich, Vereinfachungsannahmen von steigender Bedeutung gemacht werden müssen :

1. Die infinitesimale, optimale "Dehnung" der grossen Halbachse wird solcherart, im elliptischen Falle, für eine ganzzahlige Anzahl (oder eine grosse Zahl $N \gg 0(1/\varepsilon)$) von Umläufen behandelt. Der maximale Schub ist tangential und wirkt, bei jedem Umlauf, längs eines, das Perigée umfassenden, Bogens (Abb. II, 1-2).
2. Die infinitesimale optimale Drehung wird ebenfalls im Rahmen der gleichen Hypothesen behandelt. Der maximale Schub ist zur Umlaufebene senkrecht und wirkt längs eines oder zweier Bogen während jeder Umdrehung (Abb. II, 2-4).
3. Die optimalen Überführungen zwischen kreisförmigen komplanaren benachbarten Umlaufsbahnen werden für einen beliebigen Überführungswinkel studiert.

Man muss reguläre und singuläre Lösungen des linearisierten Problems, welche nur für Überführungswinkel grösser als 180° auftreten können, unterscheiden.

Die reguläre Lösungen enthalten eine wechselnde Folge von Maximalschub- und ballistischen Bogen (Abb. II, 3-6 et 7). Der optimale Schub ist in Bezug auf die Symmetrieachse des Überführungsbogens antisymmetrisch. Das Gesetz der Schuborientierung und die spezifische "Dehnung" des Kreisbahnradius (Dehnung pro Einheit der charakteristischen Geschwindigkeit) hängen nicht nur vom Überführungswinkel, sondern auch von dem Verhältnis der "Dehnung" des Umlaufbahnradius zum verfügbaren Schub ab.

Die singuläre Lösungen sind vom Typus Ia (singulär, eben) und entsprechen einer tangentialen Schubwirkung. Es tritt Ausartung der linearisierten Lösung auf. Es genügt in der Tat den Schub entlang des Überführungsbogens so zu verteilen, dass die erwünschte "Dehnung" verwirklicht und dass das Massenzentrum der Verteilung im Zentrum der Bahn sei (Abb. II, 3-18). Diese singulären Lösungen sind besonders wichtig, weil die spezifische "Dehnung" (in der linearen Untersuchung) dann maximal wird.

Diese Ausartung verschwindet, wenn die Untersuchung auf höhere Ordnungen dieser singulären Lösungen erstreckt wird.

4. Die Untersuchung höherer Ordnung behandelt allgemeiner optimale, ebene Überführungen vom Hohmann'schen Typus zwischen kreisförmigen, benachbarten, coaxialen, direkten, sich nicht schneidenden Umlaufsbahnen.

Diese Überführungen werden in ökonomischer Weise die Verwendung der bi-impulsionellen Lösung von Hohmann erhalten, wenn der Schub des Vortriebsgerätes nicht begrenzt wird (Abb. II, 4-9). Im gegenteiligen Falle, bestehen sie in einer Folge von Maximalschubbogen leicht abnehmender Dauer, zuerst in Erdnähe und dann in Erdferne (Abb. II, 4-16).

Der optimale Schub wirkt praktisch entlang der Halbierenden des Winkels zwischen der lokalen Waagerechten und der Tangente an die Umlaufsbahn.

Die Zentriwinkel der Perigeums- und Apogeumsbogen sind beziehungsweise gleich unter sich, wenn die Ausschubgeschwindigkeit gross ist im Vergleich mit der Umlaufgeschwindigkeit, ansonsten nehmen sie leicht ab.

Der Unterschied zwischen der charakteristischen Geschwindigkeit (Integral der Schubbeschleunigung) einer solchen Lösung und der Lösung von Hohmann für die gleiche Überführung ist von dritter Ordnung im Verhältnis zur Bedeutung der Überführung, selbst für die verhältnismässig langen Schubbogen. Das erklärt die Ausartung, die bei der linearisierten Untersuchung solcher Lösungen festgestellt wurde.

5. Die optimale Überführungen zwischen quasi-kreisförmigen ($\varepsilon \leq$ Ordnung $\varepsilon \ll 1$) benachbarten, komplanaren oder nicht komplanaren Umlaufsbahnen wurden unter den Voraussetzungen untersucht, dass das Schubgerät fähig ist Impulse zu liefern und dass die Überführungsdauer genügend gross ist, um die erhaltene Lösung mit der rechnerischen Annahme indifferenter Dauer zu benutzen (ein Umlauf genügt in allen Fällen).

Entsprechend der zu verwirklichenden Überführung ist die optimale Lösung von einer der vier

folgenden Typen (Abb. II, 5 - 3).

Typus I : bi-impulsionnal (zwei genau bestimmte Impulse).

Typus II : bi-impulsionnal nodal (zwei bestimmte, in den Knoten wirkende Impulse).

Typus Ia : singulär, eben.

Typus III : singulär, dreidimensionnal.

Die zwei letzten Typen wurden schon oben erwähnt. Die Ausartung dieser singulären Lösungen verschwindet, wenn die Überführung nicht zwischen quasikreisförmigen Umlaufsbahnen, sondern zwischen elliptischen Bahnen geringer Exzentrizität ($e \leq \text{Ordnung } \epsilon \ll 1$) stattfindet. Die optimale Lösungen sind dann mono, bi- und tri-impulsionnal.

"Das erreichbare Gebiet" (Menge der Überführungen die mit einer bestimmten, charakteristischen Geschwindigkeit erhalten werden können) wird im einzelnen analysiert (Abb. II, 5 - 11).

6. Die Lösung optimaler, langer Dauer, Begegnungen zwischen quasikreisförmigen, benachbarten, komplanaren oder nicht komplanaren Umlaufsbahnen wird in einfacher Weise aus der Lösung der Überführungen abgeleitet.

Je nach den zu verwirklichenden Begegnungen ist die optimale Lösung von den Typen I, Ia, II, III (wie im Falle einer Überführung) oder, für entfernte Begegnungen, von zwei neuen Typen :

Typus IV mit vier Impulsen (welche auf drei vermindert werden können) und vom Typus IVa : singulär, eben (Abb. II, 5-8).

Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass die optimalen Überführungen der festgelegten Dauer zwischen benachbarten, elliptischen Umlaufsbahnen, deren praktisches Interesse klar ist, da sie mit den Problemen der Bahnenverbesserung verbunden sind, analytisch mit einem gewissen Erfolg untersucht werden können, selbst im Falle der Schubsysteme konstanter Ausschubgeschwindigkeit und begrenzten Schubes. Eine vollständige analytische Lösung kann für einige besondere Klassen von Überführungen erhalten werden.



КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ

Задача об оптимальных (с минимальным расходом массы) переходах и встречах между орбитами имеет основное значение в пространственной динамике. Изыскания, сравнительно новые, в этой области относятся одновременно к классической "небесной механике" и к современным методам оптимизации вытекающим из "вариационного исчисления" ("теория области удобоуправляемости" Контансу, "принцип максимума" Понтрягина).

Аналитическое решение этой задачи трудно и большая часть изысканий использует численные методы оптимизации. Однако, некоторые аналитические результаты могли быть получены для центрального поля, в случае оптимальных переходов безразличной продолжительности, также как в случае оптимальных переходов фиксированной продолжительности между соседними орбитами, для двигательных систем с модулируемой скоростью испускания и с ограниченной мощностью (системы (S_2)).

В противоположность этому, случай оптимальных переходов установленной продолжительности между близкими орбитами был, до сей поры, мало изучен для двигательных систем с постоянной скоростью испускания и с ограниченной тягой (системы (S_1)).

Целью настоящей работы является, главным образом, вклад в изучение этого последнего типа переходов и в сравнении результатов полученных с его гомологами относящимися к системам продвижения вперед (S_2) .

После краткого упоминания использованного метода оптимизации, задача оптимальных переходов подвергается определению и, для начала, изучению в случае любого поля тяготения, а это дает возможность выявить различия между решениями соответствующими разным системам тяги: напор модулируется во время перехода для систем (S_2) ; для систем тяги (S_1) имеется (за исключением единственного случая) последовательность дуг с максимальным напором и дуг баллистических.

Все эти решения прибегают постоянно к одному и тому же понятию "вектора эффективности" указывающего оптимальное направление тяги, геометрическое объяснение которой дается на рис. (1, 2 - 7): начало этого вектора представляет подвижная точка M , а конец подвижная точка "пилот" P , расположен-

ная недалеко от M , подверженная тому же ускорению тяги и тому же полю тяготения, что и точка M и описывающая "направляющую кривую" ($\mathcal{D}$), близкую к траектории перехода ($\mathcal{T}$) точки M

В случае центрального поля тяготения интерес использования элементов кеплеровой орбиты (O), соприкасающейся с траекторией ($\mathcal{T}$) точки M в каждый момент, в качестве составляющих "состояния" является очевидным. Вычисление пертурбаций элементов направляющей орбиты (O_p) соприкасающейся с траекторией ($\mathcal{D}$) подвижной точки пилота $\mathcal{P}$ дает нам, кроме всего прочего, первичный, векторный интеграл приобщенный к общему вращению, которое присоединяется к первичному интегралу гамильтониана.

Гипотеза незначительных отклонений (порядка ε) соприкасающейся орбиты по отношению к номинальной, отправной орбите во время перехода делает возможной линеаризацию задачи. Придаток становится постоянным и решение задачи оптимизации совершается в течение трех стадий:

- 1) т.к. придаток дается *a priori*, то из него выводится закон оптимальной тяги.
- 2) Эта оптимальная тяга вносится в линеаризованные уравнения движения и эти уравнения интегрируются. Из них выводятся изменения элементов орбит и консоммация в зависимости от придатка.
- 3) Придаток определяется *a posteriori*, исходя из изменений элементов вызванных переходом (инверсией), а консоммация, также как закон оптимальной тяги, выводится из этих изменений.

Каждая из этих стадий гораздо более деликатна для систем тяги (S_1) чем для систем (S_2). В самом деле, в первом случае:

1) определение точек коммутации разделяет дуги максимальной тяги от дуг баллистических и ведет к решению уравнения порядка ≤ 6 . Это определение облегчается использованием понятия "кривой эффективности" ($\mathcal{P}$) или места подвижной точки пилота $\mathcal{P}$ в подвижных осях (рис. I.3 - 4).

2) интегрирование представляет трудности и ведет вообще к интегралам эллиптического вида или даже к более сложным.

3) инверсия может быть произведена только при помощи последовательных приближений.

Общие результаты полученные в этой работе сводятся к следующему:

в случае перехода между квази-круговыми орбитами эксцентricности $e \leq$ порядок $\varepsilon \ll 1$ "кривая эффективности" ($\mathcal{P}$) особенно проста (эллипс) и нет никогда более двух дуг максимальной тяги для перехода без встречи, кроме особого случая, или, на границе, более двух импульсов на один оборот,

в случае перехода между какими-либо эллиптическими, соседними орбитами в нашем распоряжении могут быть, в крайнем случае, три дуги максимальной тяги (или, на грани, три импульса) на один оборот.

Единичные случаи (линеаризованной задачи), в которых линеаризованное решение не единственно, а вырождается в большое число решений (некоторая свобода предоставляется в выборе положения точек приложения и величины тяги), могут иметь место только для переходов между квази-круговыми орбитами ($e \leq \text{порядок } \varepsilon \ll 1$). В таком случае имеется две разновидности единичных решений: разновидность I-бис (единичная, плоская), в которой оптимальная тяга касательна (рис. I.3 - II) и разновидность III (единичная, трехмерная), в которой оптимальная тяга расположена в одной из плоскостей касательных к орбите, под углом в 30° по отношению к горизонтальной, местной плоскости (рис. I.3 - I2).

Результаты касающиеся явления индукции получаются потом (невменяемые измерения кое-каких элементов орбиты обусловленные изменениями других элементов орбиты).

Мы присутствуем при взаимной неиндукции между поворотом плоскости орбиты, но не при разделении между двумя задачами (сложении решений), как это имеет место для систем (S_2).

Если мы назовем классом переходов совокупность переходов, для которых необходимы только некоторые частные изменения элементов орбиты, мы можем формулировать следующий результат касающийся выбора элементов орбиты произведенного в данной работе: мы располагаем, в случае целого числа оборотов (или большего числа оборотов), по меньшей мере одиннадцать классами переходов без встречи, в которых вынужденные изменения не влекут за собой другого изменения, среди общего числа тридцати и одного перехода без встреч.

В случае переходов между квази-круговыми орбитами ($e \leq \text{порядок } \varepsilon \ll 1$) у нас есть, по меньшей мере, четырнадцать категорий переходов на девятнадцать удовлетворяющих этому условию, в частности, все категории, в которых изменение одного элемента или изменение двух элементов необходимы.

Тогда аналитическое изучение должно быть продвинуто вперед для некоторых, особых категорий переходов представляющих явный практический интерес. Сложность изучения этих особых случаев возрастает в зависимости от числа элементов орбиты долженствующими быть измененными, т.ч. упрощительные гипотезы, все более и более значительные, должны быть выдвинуты в качестве обмена.

1) Безконечно-малое, оптимальное "расширение" большой полуоси обсуждается, таким образом, в случае эллиптической формы для целого числа оборотов (или для большого числа $N \gg 0(\frac{1}{\varepsilon})$). Максимальная тяга касательна и применима для каждого оборота на дуге окружающей перигей (рис. 2.1-2).

2) Безконечно-малое, оптимальное обращение плоскости орбиты обсуждается также в области тех-же гипотез. Максимальная тяга перпендикулярна к плоскости орбиты и прилагается к одной или двум дугам при каждом обращении (рис. 2.2 - 4).

3) Оптимальные переходы между круговыми, копланарными, соседними орбитами изучаются для любого угла перехода.

Необходимо различать между упорядоченными решениями и решениями единичными (линеаризованной задачи), которые появляются только для угла перехода превосходящего 180° .

Упорядоченные решения содержат чередование дуг максимальной тяги и дуг баллистических. Оптимальная тяга антисимметрична по отношению к оси симметрии дуги перехода. Закон установки тяги и удельное "расширение" радиуса круговой орбиты (расширение единицы характеристической скорости) зависят не только от угла перехода, но и от отношения "расширения" радиуса орбиты к максимальной располагаемой тяге.

Единичные решения принадлежат к виду I-бис (единичная плоскость) и соответствуют касательному приложению тяги. Мы присутствуем при вырождении линеаризованного решения. В самом деле, достаточно распределить тягу вдоль дуги перехода таким образом, чтобы желаемое "расширение" было получено и чтобы "центр масс" распределения был в центре орбиты (рис. 2.3 - 18). Эти единичные решения особенно важны, т.к. удельное "расширение" становится тогда максимальным (в линеаризованном изучении).

Это вырождение исчезает в силу изучения более высших порядков этих единичных решений.

4) При изучении при высших порядках обсуждаются в общем виде оптимальные, плоские переходы типа Хохмана между квази-круговыми, соседними, коаксиальными, прямыми, непересекающимися орбитами.

Эти переходы осуществляются выгодным способом, используя двухимпульсное решение Хохманна, если тяга двигателя не ограничена (рис. 2.4 - 9). В противном случае, они состоят из последовательности дуг максимальной тяги, слабо убывающей продолжительности, сначала по перигею, а потом по апогею (рис. 2.4 - 16).

Максимальная тяга прилагается практически вдоль биссектриссы угла образуемого местной горизонталью и касательной к траектории.

Углы в центре дуг перигея и апогея равны соответственно между собой, если скорость испускания велика по сравнению со скоростью орбитации, в противном случае они слабо убывают.

Разница между характеристической скоростью (интеграл ускорения тяги) такого решения и характеристической скоростью решения Хохманна относящейся к одному и тому же переходу принадлежит к разнице третьего порядка по отношению к значительности перехода, даже для сравнительно длинных дуг тяги. Это объясняет вырождение установленное во время линеаризованного изучения таких решений.

5). Оптимальные переходы квази-круговыми, соседними, компланарными или некомпланарными орбитами ($e \ll \text{порядок } \varepsilon \ll 1$) изучаются в предположении, что двигатель может дать импульсы и что продолжительность перехода достаточно велика, чтобы было возможно использовать решение полученное при предположении безразличной продолжительности (один оборот достаточен во всех случаях).

В зависимости от перехода имеемого в виду оптимальное решение принадлежит к одной из четырех следующих категорий (рис. 2.5-3):

Тип I: двумпульсный (два вполне определенных импульса)

Тип II: " узловой (два вполне определенных импульса приложенных к узлам)

Тип I бис: единичный, плоский

Тип III: единичный, трехразмерный

Последние два типа были упомянуты выше. Вырождение этих единичных решений исчезает, если переход происходит не между квази-круговыми орбитами ($e \leq \text{порядок } \varepsilon \ll 1$), а между эллиптическими орбитами малой эксцентricности ($\varepsilon \ll e \ll 1$). Оптимальные решения в таком случае одно, двух или трехразмерные.

"Достижимая область" (группа переходов могущих быть осуществленными с данной характеристической скоростью) подробно проанализирована (рис. 2.5 - II).

6) Решение относящееся к оптимальным встречам большой продолжительности между соседними, квази-круговыми, компланарными или некомпланарными орбитами выводится просто из решения относящегося к переходам.

В зависимости от имеемой в виду встречи оптимальное решение принадлежит к типам I, I-бис, II, III (как в случае переходов) или, для дальних встреч,

к двум новым типам: к типу IV четырехимпульсному (четыре импульса могут быть сведены к трем) и к типу IV - бис, плоскому, единичному (рис.2.6 - 8).

В заключении, оптимальные переходы определенной продолжительности между эллиптическими, соседними орбитами, практический интерес которых явен, т.к. они связаны с задачами исправления орбит, могут быть изучаемы аналитически с верным успехом, даже в случае систем продвижения с постоянной скоростью испускания и с ограниченной тягой. Полное аналитическое решение может быть получено для некоторых особых классов переходов.



DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

RÉSULTATS THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTAUX

CONCERNANT LA TRANSMISSION DE CHALEUR EN RÉGIME OSCILLATOIRE

Vu et approuvé :

Paris, le 27 Juin 1967

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

